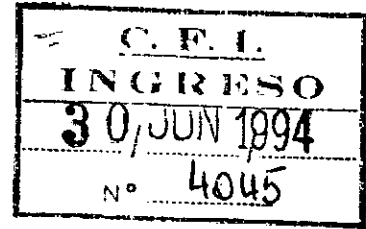


M.F.U. 215

39085

Buenos Aires, 18 de junio de 1994.-



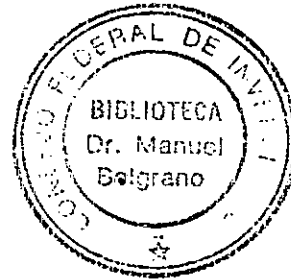
Señor Secretario General del
Consejo Federal de Inversiones
Ingeniero J. C. Diacera
S/D

De la mayor consideración:

Me dirijo a usted con el objetivo de elevarle, para su evaluación, el informe final en relación al proyecto de asesoramiento pedagógico en el área de matemática, para la provincia de La Pampa, proyecto para el que fui contratada según consta en el expediente número 2312.

Sin otro particular saludo a usted
muy atentamente

Patricia Sadovsky



O/V. 122
511
Inf. Final

Informe final acerca del proyecto de asesoramiento a la provincia de La Pampa en el área de matemática para los niveles primario y medio Expediente 2310

Patricia Sadovsky

20 de Junio de 1994

A. ACCIONES VINCULADAS AL NIVEL MEDIO

A.1 Del trabajo con la comisión de cambio curricular

La problemática abordada con la comisión de cambio curricular giró alrededor de tres cuestiones:

- a) contenidos curriculares, especialmente los referidos al cuarto año del bachillerato;
- b) estrategias de interacción con el conjunto de los docentes;
- c) estrategias futuras de capacitación a partir de la constitución del equipo de multiplicadores;
- d) interacción con la Universidad.

a) Contenidos curriculares

La tarea se centra en el ajuste de los contenidos para el ciclo básico y en la formulación de los contenidos para cuarto año.

Los datos recogidos a través de conversaciones con los docentes permiten detectar que es necesario reducir los contenidos de tercer año ya que la propuesta resulta abrumadora por su extensión. Este problema introduce la discusión acerca del uso del tiempo en el sistema de enseñanza. Por una parte, el planteo de muchos contenidos invalida la posibilidad de desplegar estrategias de enseñanza del tipo de las que se alientan desde el proyecto de cambio. Por otra parte, si se reducen los contenidos y los docentes no ponen en práctica un modelo de enseñanza basado en la elaboración del conocimiento por parte del alumno, se corre el riesgo de provocar un serio vaciamiento. Esta cuestión exige establecer un delicado equilibrio.

Otro aspecto que es necesario cuidar especialmente se refiere a la introducción de contenidos que son nuevos para los docentes y que, por lo tanto, los profesores necesitan estudiarlos y formular alrededor de los mismos una propuesta de trabajo. Si un programa incluye muchos contenidos nuevos para los docentes y si, además resulta muy extenso, serán esos contenidos nuevos los que seguramente se dejarán de lado a la hora de seleccionar propuestas de trabajo en el aula.

Las consideraciones anteriores llevan a revisar los contenidos planteados para el ciclo básico, tratando de poner atención en las cuestiones mencionadas. Como ya se señaló en otras oportunidades, los contenidos incluidos en el eje "Probabilidad y Estadística" son nuevos para los docentes. La aproximación superficial que ellos tienen a estos temas hace que, en la mayoría de los casos, se descarten como objetos de enseñanza. Por ese motivo se decide distribuir la enseñanza de

Los conceptos que se proponían para segundo y tercer años entre segundo, tercero y cuarto años. Es así como en el eje Probabilidades y Estadística se introducen las siguientes modificaciones:

SEGUNDO AÑO:

Se propone solamente la introducción al cálculo combinatorio y la parte de probabilidades pasa a tercer año.

TERCER AÑO

Introducción al concepto de probabilidad
Probabilidad y frecuencia relativa
(Se elimina de tercer año el tema "Distribución binomial")

En relación al eje Funcional, se propone que el estudio de las funciones exponenciales y logarítmicas pase cuarto año. Se incorpora en tercer año la enseñanza de ecuaciones en una variable.

El esquema de contenidos planteado para cuarto año contempla tanto contenidos conceptuales como procedimentales. La decisión de incluir contenidos procedimentales había sido tomada como producto de discusiones realizadas en el año 1992 y las justificaciones correspondientes figuran en el informe final del primer proyecto de asistencia técnica. El planteo final de los contenidos para cuarto año figura en el Anexo I.

Un aspecto que aún queda sin resolver se refiere a la compatibilización del programa propuesto para cuarto año con las distintas modalidades de bachillerato que existen en la provincia las cuales se han mantenido provisoriamente hasta tanto se tengan más precisiones respecto de la implementación de la Ley Federal de Educación. El caso más urgente se refiere al único bachillerato en ciencias que existe en la provincia -se dicta en General Pico- ya que su antiguo plan contempla la asignatura "Estadística" para quinto año, mientras que el plan presentado a través del proyecto de cambio propone distribuir los contenidos de Estadística y Probabilidades a lo largo de los cinco años de bachillerato. La asistencia técnica considera que habrá que prever para el ciclo 1995 una modificación de los contenidos de la asignatura Estadística para quinto año del bachillerato en Ciencias que tenga en cuenta los nuevos lineamientos curriculares.

b) Estrategias de interacción con el conjunto de los docentes

Existen en este momento en la provincia dificultades para ofrecer al conjunto de los docentes instancias de capacitación. Esta realidad genera obstáculos importantes en el proceso de apropiación por parte de los docentes de la propuesta curricular. En interacción con la comisión de cambio curricular, la asistencia técnica ha considerado que una manera de contribuir a contrarrestar los efectos negativos de la falta de reuniones, es enviar materiales escritos en los que los docentes puedan apoyarse para preparar sus clases. Teniendo en cuenta esta consideración se ha realizado una selección de textos que los docentes han recibido en sus escuelas. Esta actitud recoge un

análisis hecho oportunamente, a través del cual se evaluaba la dificultad de lograr la implementación del currículum, entre otras causas, por la carencia de textos que planteen un enfoque similar al del proyecto de cambio.

Por disposición de las autoridades de la provincia, durante el receso de invierno los profesores participarán de una instancia de capacitación autogestiva. Para ello, la Dirección de Enseñanza Media y Superior solicitó a la asistencia técnica, la elaboración de un material que pudiera utilizarse como base de esa capacitación. La asistencia técnica elaboró un documento que se adjunta en el Anexo III.

c) Estrategias futuras de capacitación a partir de la constitución del equipo de multiplicadores.

En la instancia de Julio los docentes del grupo de multiplicadores actuarán como coordinadores del resto de los docentes. Será esta la primera oportunidad que tendrán de ejercer un rol de capacitación. Sin embargo, no han quedado definidas líneas de acción permanentes por parte del grupo de multiplicadores. Es necesario estructurar un plan de capacitación que incorpore la acción de algunos de los docentes que participaron de este grupo de trabajo. La asistencia técnica evaluó la actuación de cada uno de los participantes y recomendó la incorporación de algunos docentes a una estructura de capacitación.

d) Interacción con la Universidad

Se iniciaron acciones tendientes a establecer una articulación entre la escuela media y la Universidad. Para ello se realizaron reuniones entre la asistencia técnica, la comisión de cambio curricular y representantes de las distintas facultades de la Universidad. Participaron de estas reuniones profesores de la facultad de Ciencias Exactas, de Ingeniería, de Ciencias Económicas y de Agronomía. La asistencia técnica expuso los fundamentos de la propuesta del área de matemática, explicó los principales cambios de contenidos y comentó acerca del estado de apropiación del proyecto por parte de los docentes de la escuela media. Asimismo se solicitó a los docentes universitarios que realicen una lectura de los documentos elaborados hasta el momento y que formulen sugerencias principalmente en lo que se refiere a los contenidos para cuarto y quinto años. En general los profesores universitarios manifestaron acuerdo con las propuestas curriculares y comprometieron su colaboración. Quedó planteada además la necesidad de revisar los planes de formación de los profesorado universitarios, y de coordinar las ofertas de capacitación docente que se puedan implementar tanto desde el Ministerio como desde la Universidad.

A.2 Trabajo con multiplicadores

Durante las jornadas de trabajo con el equipo de multiplicadores se abordaron los siguientes temas:

- Relaciones y Funciones
- Número real
- Introducción al razonamiento deductivo
- Abordajes en geometría

La asistencia técnica propone trabajar alrededor de la selección y análisis de situaciones didácticas. La tarea resulta desafiante para los participantes, generándose desde el comienzo un clima de producción y entusiasmo. Es notorio el cambio de actitud respecto de los primeros encuentros en los cuales la mayoría de los docentes se ubicaba en una posición defensiva que los llevaba a repetir el "discurso" del proyecto de cambio sin ninguna convicción. Por el contrario, en esta oportunidad, la mayoría de los profesores se ubica como un equipo de trabajo que discute, revisa, intercambia opiniones, reflexiona sobre su propia práctica, piensa delante de sus colegas... La asistencia técnica considera que influyen para este cambio de actitud tres factores: 1) los problemas que se generan en cada institución debido a la falta de seguimiento del proyecto en el área de matemática ponen en primer plano la necesidad de producir un cuerpo de ideas que se constituya en una referencia más concreta que el documento curricular; 2) el hecho de vislumbrar la responsabilidad que significa asumir tareas de capacitación docente; 3) la producción y los resultados que pueden exhibir quienes más se han apropiado de las propuestas difundidas a través de las diversas instancias de capacitación que se han ofrecido.

Al abordar la problemática de Relaciones y Funciones, se discute en primer lugar acerca de criterios generales para enfocar la enseñanza de los contenidos -tanto conceptuales como procedimentales- vinculados a este eje. En ese sentido se revisa el planteo tradicional de comenzar enseñando relaciones en conjuntos finitos para luego plantear la función como un caso particular de relación. Los ejemplos -se analiza- que se proponen en general para el tratamiento de relaciones en conjuntos finitos son poco sustanciosos respecto de los aprendizajes que comprometen. Sigue existiendo en ese enfoque la tendencia a confundir concepto con forma de representación. Se propone entonces comenzar planteando relaciones de tipo funcional en conjuntos infinitos, sin detenerse a diferenciar relación de función.

La secuencia de trabajo alrededor de la cual se discute constituye la base de un documento para el conjunto de los docentes que ha elaborado la asistencia técnica y que se incluye como parte de este informe en el Anexo II. En este documento se explicita, para cada situación: a qué aprendizajes se apunta a través de la situación, qué discusiones debería promover el docente, cuál es el sentido de las preguntas que se plantean. Proponer situaciones sin el correspondiente análisis es alentar la actitud de muchos profesores de reducir la enseñanza de la matemática a la elaboración de guías de ejercicios para los alumnos.

Dentro del eje Relaciones y Funciones se aborda el estudio de la proporcionalidad a través de una secuencia para que los participantes analicen. La misma apunta a la comprensión de los elementos necesarios para caracterizar una situación de proporcionalidad directa: constante de proporcionalidad y elección de unidades en el dominio y la imagen. Es interesante señalar que la formulación numérica de la proporcionalidad, esto es la formulación desvinculada de un contexto particular de funcionamiento, exige solamente la determinación de la constante para definir la función. La necesidad de elegir una unidad de medida tanto en el dominio como en la imagen- queda diluida

cuando se parte de la definición matemática del concepto y luego se lo intenta aplicar. Vuelve a discutirse a propósito de la secuencia que se analiza, acerca de las implicancias de la elección de un determinado modelo didáctico. En ese sentido se explicita -una vez más- hasta qué punto el modelo "aprendo, aplico" oculta el verdadero funcionamiento de los conceptos que se pretende enseñar.

A partir del análisis de la enseñanza del eje numérico se vuelven a discutir la distintas dimensiones del análisis didáctico. Al respecto se trabaja sobre las siguientes cuestiones:

- **Opciones globales.** En relación al contenido que se estaba enfocando (números racionales no negativos) se discutieron los diferentes sentidos que se trabajarán: racionales medida, racionales constante de proporcionalidad en una relación de proporcionalidad directa.

- **Variables didácticas sobre las que se operará.** A propósito de los números racionales no negativos, se propusieron ejemplos de situaciones en las que, al variar ciertas condiciones, varían tanto los procedimientos como las propiedades que ponen en juego quienes aprenden.

- **Posibles procedimientos de resolución.** Se hizo un análisis en el que se relacionaron los procedimientos que utilizan los alumnos con las propiedades (correctas o no) en las que se apoyan esos procedimientos.

- **Formas de validación que ofrece la situación.** En relación a esta cuestión, los profesores expusieron las dificultades de los alumnos para controlar los resultados de su producción. Es por eso que -señaló la asistencia técnica- es necesario gestionar la validación desde la situación misma. Esto significa prever tanto pruebas de tipo pragmático como incluir consignas que movilicen en el alumno estrategias para rechazar lo erróneo y aceptar lo correcto.

- **Contextos de utilización.** Se propusieron ejemplos de problemas que, vistos desde su formulación matemática son idénticos y que, sin embargo, generan en el alumno estrategias de resolución muy diferentes. Se analizó, a propósito de los ejemplos planteados, que no es suficiente ser exhaustivo en cuanto a los contextos que se proponen sino que, es necesario, además, provocar la comparación entre los mismos.

- **Análisis e integración de diferentes formas de representación.** Este plano del análisis didáctico había sido muy trabajado a propósito de la secuencia elaborada para el eje "relaciones y funciones"; en esta instancia se retomó con ejemplos vinculados a los números racionales.

Se propuso elaborar una secuencia para la enseñanza de números racionales en primer año. La primera situación que se analizó involucra la división entre enteros. Se discutió que este aspecto del funcionamiento de la fracción puede englobarse en el tema "medida". Se eligieron números que den lugar a varios procedimientos posibles y se acordó en señalar que si los alumnos no propusieran las distintas alternativas previstas, el

docente debería provocarlas de alguna manera. A continuación se propuso como parte de la actividad justificar la equivalencia entre los procedimientos discutidos. Luego se propusieron otras situaciones similares que apunten a discutir con los alumnos que si se reparten a objetos fraccionables entre b personas, cada una recibe a/b . Otro aspecto que se previó discutir con los alumnos a propósito de la situación propuesta es el de comparación de distintos números racionales. En relación con las situaciones de división entre enteros se analizó la siguiente ecuación

$$b \text{ personas} \times \text{para cada persona} = a \text{ objetos}$$

y se plantearon situaciones dejando, alternativamente fijo uno de los términos y haciendo variar los demás. Esto supone establecer tres posibles tablas de proporcionalidad. En relación a las mismas se anticiparon las siguientes discusiones con los alumnos

- cuál es el significado de la constante en cada caso?
- cómo funcionan las propiedades de la proporcionalidad directa en cada caso? Se anticipó aquí que es posible obtener el resultado de ciertas operaciones entre fracciones a partir de aplicar las propiedades, aun cuando no se utilicen los algoritmos convencionales.

A continuación se propuso el análisis de tablas de proporcionalidad idénticas desde el punto de vista numérico que tienen significaciones distintas según el contexto. Por ejemplo se propuso comparar las siguientes situaciones

"En primero A, 4 de cada 7 chicos concurren al campamento. Hacer una tabla que relacione cantidad total de alumnos con alumnos que viajan"

"Para hacer la mezcla es necesario poner 4 partes de aguarrás por cada 7 partes de barniz. Hacer una tabla que relacione las partes de barniz con las correspondientes de aguarrás".

Sucedo en este caso, que las dos tablas son idénticas desde el punto de vista numérico. En ambas situaciones la constante de proporcionalidad es $4/7$; sin embargo, en la primera, $4/7$ establece una relación parte-todo y en la segunda una relación parte-parte. Por otra parte, la primera relación supone dominio e imagen naturales mientras que la segunda admite dominio e imagen racionales. Se remarcó la necesidad de provocar en los alumnos la comparación entre ambas situaciones.

El grupo de problemas que se discutieron luego, apunta a trabajar alrededor de la noción de comensurabilidad. La situación propuesta es el siguiente:

La clase se divide en 6 grupos. A cada grupo se le entrega un par de varillas de madera (no flexibles) de las siguientes medidas:

grupo 1	grupo 2	grupo 3	grupo 4	grupo 5	grupo 6
7 cm	5 cm	5 cm	4 cm	6 cm	10 cm
4 cm	8 cm	7 cm	9 cm	8 cm	8 cm

Consigna: Cada grupo recibió un par de varillas. Encuentren la medida de la varilla más grande, si se considera como unidad la varilla más chica. No pueden usar regla, ni pueden marcar con lápiz la varilla. En el aula hay disponibles más varillas como las que tienen, si las necesitan pueden usarlas.

Por qué varillas de madera? Porque se desea bloquear la posibilidad de que los alumnos plieguen las varillas para movilizar el procedimiento consistente en colocarlas consecutivamente hasta conseguir con las dos clases de varillas la misma longitud. Se apunta a discutir con los alumnos alrededor de las siguientes ideas: decir que, por ejemplo, 4 veces la longitud a es igual a 7 veces la longitud b, es lo mismo que decir que a es $\frac{7}{4}$ b, y esto es lo mismo que decir que $\frac{1}{4}$ b "entra" 7 veces en a de manera tal que existe una unidad ($\frac{1}{4}$ b) que entra un número entero de veces en a y en b. Por este hecho se dice que a y b son conmensurables.

Una vez que cada grupo obtuvo la medida se anotan en el pizarrón todos los resultados y se discute acerca de los procedimientos utilizados.

A continuación se propuso una situación de comunicación en el aula: la clase se divide en una cantidad par de grupos, y se trabaja por pares de grupos. El docente da a cada grupo una unidad de medida (desconocida para los otros grupos). Todos los grupos deben medir (con su unidad) el mismo objeto y luego comunicar al grupo que trabaja en relación con ellos la medida obtenida; con esta información, el grupo receptor de la información, debe dibujar la unidad de medida del grupo que emitió la información. Esta situación admite una validación pragmática (la medida dibujada es o no igual a la del grupo que emitió la información) que deberá ser complementada con una forma de validación intelectual.

Se propone trabajar la noción de densidad alrededor de una situación basada en un trabajo de R. Douady. En este caso -también se trata de una situación de comunicación- los alumnos trabajan separados en dos grupos: el grupo que pregunta (P) y el grupo que responde (R). El docente propone una fracción al grupo R ubicada entre 5 y 10 sin que el grupo P conozca cuál es. A través de preguntas que sólo pueden responderse por sí o por no, el grupo P debe situar un intervalo lo más pequeño posible en el que se encuentra la fracción. Luego se intercambian los roles. Gana el equipo que ubica el intervalo con mayor precisión.

En general, el grupo P comienza planteando intervalos cuyos extremos son fracciones del tipo $\frac{a}{2^n}$ pero luego descartan esta posibilidad (les resulta poco económica cuando se achica la longitud del intervalo) y pasan a trabajar con fracciones del tipo $\frac{a}{10^n}$. En este caso se espera que el grupo R movilice la idea de que resulta cómodo responder a la preguntas descomponiendo la fracción dada en suma de fracciones decimales. Haciendo esto, al tiempo que se sitúa la fracción con una precisión arbitraria se elabora el concepto de división decimal entre enteros. El interés de la situación reside también en el hecho de que permite que los alumnos comprendan cómo aproximar

una fracción cualquiera a través de fracciones decimales.

Durante las jornadas se insistió en el tipo de discusiones que deberían generarse a través de las situaciones propuestas.

La discusión acerca del papel de la demostración en la escuela media, se desarrolló a propósito del análisis de diferentes enfoques para la enseñanza de la geometría.

Se discutieron algunos problemas que ayudaría a que los alumnos comprendan el sentido de la demostración en matemática. Se insistió en la falta de articulación entre la propuesta de la escuela primaria basada en lo experimental y en lo perceptivo, y la presentación axiomática de la geometría. El análisis de algunas situaciones propuestas en un material de C. Laborde (1) sobre enseñanza de la geometría permitió volver a trabajar sobre concepto de variable didáctica que ya había sido tratado en relación a otros contenidos. La situación que plantea C. Laborde es la siguiente

Construir el eje de simetría de un trapecio isósceles

- a) plegando la figura
- b) utilizando regla graduada
- c) utilizando regla no graduada

Para realizar la tarea a) el alumno utiliza solamente la percepción, para cumplir con la consigna b) es necesario poner en juego el hecho de que el eje de simetría pasa por el punto medio del segmento determinado por un par de puntos simétricos mientras que el problema c) exige utilizar el hecho de que los puntos unidos en una simetría ortogonal pertenecen al eje de simetría.

En la situación anterior los materiales que se utilizan actúan como variables didácticas en la medida en que modifican sustancialmente las propiedades empleadas para resolver el problema. Es interesante señalar que en tanto en el caso a) el control que hace el alumno del resultado de su actividad es de tipo pragmático - se trata de plegar- en los casos b) y c) el control de la actividad está dado por la puesta en juego de propiedades relativas a la simetría ortogonal.

La selección de los materiales como variables didácticas proviene en este caso de un análisis del concepto y de sus propiedades; en este sentido se diferenció este ejemplo de otros que se habían trabajado en otras instancias en los que es el análisis de los procedimientos de los alumnos y no de las propiedades del concepto lo que lleva a operar sobre las variables descriptas.

A.3 Del trabajo con el conjunto de los docentes

Se ha realizado una jornada con el conjunto de docentes de cuarto año con el objetivo de explicitar aspectos de la implementación del programa. La reunión generó una gran expectativa ya que los profesores se encontraban desorientados

(1) Laborde, C. (1989) "Problemes de l'enseignement de la géométrie au collège". Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. IREM de Strasbourg.

en relación con la puesta en marcha de los contenidos. Cabe aclarar que la mayoría de los participantes asistían por primera vez a una instancia de capacitación, lo cual significa que estos docentes no han tenido en general contacto con los lineamientos propuestos en el proyecto de cambio.

Esta circunstancia se debe a dos motivos: por una parte, este año se han incorporado al sistema muchos docentes nuevos, por otra parte, los profesores del ciclo superior no dan clase en el ciclo básico.

Las mayores dudas que se explicitaron se vinculan con los alcances previstos para el eje de álgebra lineal y para el eje funcional.

En relación al eje funcional la asistencia técnica recordó que dicho eje se propone como uno de los ejes estructurantes del plan de estudios a lo largo de los cinco años y que, en ese sentido, es necesario tener claridad respecto de cuáles son los avances que se proponen en cada uno de los cursos.

Se consideró en primer término el enfoque relativo a funciones polinomiales. Se recomendó trabajar con fórmulas factorizadas y plantear a los alumnos la anticipación de la representación gráfica a partir del análisis de la expresión correspondiente. Se recalca entonces la necesidad de hacer interactuar los marcos algebraico y gráfico haciendo funcionar uno de ellos como elemento de control del otro. La asistencia técnica propuso trabajar con funciones del tipo

$$f(x) = (x-a)^n (x-b)^p$$

analizando positividad, negatividad y ceros al considerar la paridad de n y de p . La mayoría de los docentes se mostraron sorprendidos por la posibilidad de anticipar la forma de la curva a partir del análisis de la expresión algebraica, explicitando que, para ellos, se trataba de un planteo novedoso.

La asistencia técnica sugirió proponer a los alumnos ejercicios en los que se pide encontrar una función polinómica dadas ciertas condiciones:

- encontrar una función polinómica de grado n que tenga como ceros a los números a y b y discutir la cantidad de soluciones;
- encontrar la función polinómica de grado n que pase por un conjunto de puntos dados y discutir la cantidad de soluciones.

Este último punto se vinculó con la discusión acerca de sistemas lineales, señalando que el problema mencionado puede ser una oportunidad interesante de "hacer funcionar" la compatibilidad o incompatibilidad de los sistemas lineales. Cabe aclarar que, en este contexto, "hacer funcionar" significa proponerse que los alumnos puedan interpretar la discusión acerca de los sistemas en términos de existencia o no de las funciones que se pidan y puedan discutir esa existencia tanto desde el análisis algebraico del sistema como desde la interpretación gráfica del problema. Nuevamente se recalca se propone hacer interactuar el marco gráfico con el algebraico.

El tratamiento de otras funciones algebraicas propuestas en el programa se desarrolla de manera similar.

Las funciones exponenciales se discuten con bastante profundidad. Se insiste en el análisis de fenómenos que pueden ser descriptos a través de modelos exponenciales, con independencia de la fórmula. Se propone que el análisis del papel que juegan los parámetros se realice a partir de la comparación

de fenómenos del mismo tipo y finalmente se señala el interés de tratar la función logarítmica a partir del análisis de los mismos fenómenos tratados mediante funciones exponenciales (crecimiento de poblaciones, tasas de interés, etc).

Al considerar las ecuaciones -algebraicas y trascendentes- asociadas a las funciones que se trabajan, se remarcó la importancia de prever algún mecanismo anticipatorio que funcione al mismo tiempo como elemento de control.

La asistencia técnica propone a los asistentes resolver el siguiente problema:

Se vuelca líquido en un recipiente cuya forma es la del dibujo. Representar gráficamente la altura del líquido en función del volumen que se vuelca.

Al plantear el problema la asistencia técnica se proponía analizar con los docentes la complejidad del problema y las posibles discusiones que se podrían generar con los alumnos a propósito de su resolución. La mayoría de los docentes tuvo grandes dificultades para resolver el problema, lo cual sin duda vuelve a poner sobre el tapete la urgencia de poner en marcha un plan de capacitación que tenga cierta continuidad. El interés de este problema reside en que la selección de variables queda a cargo de quien lo está resolviendo, lo cual aumenta considerablemente la complejidad del mismo. Como es natural suponer, los docentes explicitan que se trata de un problema difícil para los alumnos. La asistencia técnica vuelve entonces sobre uno de los objetivos planteados en la fundamentación del Área de matemática: la utilización de los conceptos matemáticos en tanto modelos para resolver problemas supone la selección de variables pertinentes, capacidad que no es usualmente puesta en juego a partir de los problemas más clásicos ya que en estos el alumno empieza a interactuar con el problema una vez que las variables ya han sido seleccionadas.

Surge entonces una discusión alrededor del nivel de dificultad que es pertinente exigir. La asistencia técnica insiste en diferenciar aquello que es exigible aunque no evaluable para la acreditación de aquello que se exige para acreditar. En general los docentes tienen dificultades para reconocer esta diferenciación. La asistencia técnica explicita que este tipo de problemas podrían constituir "proyectos" de trabajo para los alumnos en tanto pueden ser concebidos como problemas que trascienden el marco de una clase y sobre los cuales los alumnos volverán una y otra vez, ensayando resoluciones parciales hasta obtener una resolución satisfactoria. La propuesta sería que los alumnos se hagan cargo de ciertos problemas -trabajando en grupo o individualmente- y que consulten al docente a medida que avanzan en la resolución. Este tipo de práctica -más cercana a la idea de problema científico que a la de problema escolar- es considerada como posible por algunos docentes y -por supuesto- descartada por muchos al considerarla alejada de las posibilidades de sus alumnos.

En relación al eje de álgebra lineal se aclara que el programa no plantea el tratamiento específico de matrices sino que éstas se trabajarán únicamente vinculadas a "matriz de los

coeficientes de un sistema lineal". La asistencia técnica propone un trabajo alrededor de enunciados de problemas que se resuelven a través de sistemas lineales. Se trabaja sobre un enunciado de datos sin preguntas y se les pide a los docentes que formulen preguntas que puedan ser respondidas a partir de los datos dados. La tarea resulta trabajosa para los profesores, lo cual da lugar a que tomen conciencia de las dificultades implícitas en la resolución de este tipo de problemas que, en general, no encuentran espacio de reflexión en las clases.

Esta actividad es aprovechada por la asistencia técnica para considerar la cuestión de los contenidos procedimentales como objeto de enseñanza.

La mayoría de los docentes desconoce el tema de programación lineal. La asistencia técnica explica algunos aspectos a tener en cuenta, fundamentalmente los referidos a la discusión de cantidad de soluciones. Se insiste en recomendar un tratamiento profundo del tema en dos variables y el planteo de problemas en más variables cuya solución se encontrarán a través de algún utilitario informático.

B. ACCIONES VINCULADAS AL NIVEL PRIMARIO

B.1 Trabajo con el equipo de multiplicadores

Según el plan de capacitación diseñado en diciembre de 1993, la tarea se centra en la elección, análisis, puesta a prueba, registro y análisis a posteriori de situaciones didácticas, una para cada ciclo. Dado el desfasaje de tiempos producido, la asistencia técnica decide que las situaciones a analizar se refieran a un contenido que es transversal a todo el proceso de aprendizaje: resolución de problemas. Esta opción daría la posibilidad de poner a prueba las situaciones durante el período lectivo 1993, aun a una altura avanzada del año. La asistencia técnica, fundamenta la consideración del tema "resolución de problemas" como un objeto de enseñanza. Esto es la explicitación de ciertas capacidades como contenidos de enseñanza

- interpretación de enunciados
- análisis de enunciados y clasificación según diferentes criterios
- organización de datos
- relación entre los datos numéricos, las operaciones y el enunciado
- producción de preguntas a propósito de un enunciado
- clasificación de las preguntas a propósito de un enunciado
- reconocimiento de la información presentada distintas formas de representación: textos, tablas, dibujos, esquemas, gráficos, historietas
- organización de la comunicación de los resultados

La asistencia técnica señala que es frecuente escuchar quejas de los maestros en cuanto a las capacidades de los alumnos para resolver problemas. "El problema es que no saben leer" "Los alumnos no pueden interpretar las lecturas" " No se trata de un problema de matemática sino de lengua" son frases que emiten con facilidad los docentes de distintos lugares. La asistencia técnica señala la necesidad de que la enseñanza de la matemática se haga cargo de esta dificultad tomando como una problemática que le compete, la interpretación de los enunciados de problemas.

Los participantes acuerdan con la pertinencia del tema elegido. Una de las primeras actividades realizadas con el grupo de multiplicadores consiste en analizar y clasificar una lista de problemas. La idea es empezar a diferenciar distintos tipos de problemas. Se trabaja sobre la noción de contrato didáctico a propósito de los problemas escolares. "El contrato didáctico comporta, en efecto, una cláusula "regional" (válida para todos los problemas que se puedan proponer en el marco didáctico escolar) en cuyos términos:

1. Un problema planteable posee una respuesta y sólo una (aceptable en el sentido del contrato).
2. Para llegar a esta respuesta: a) deben utilizarse todos los datos propuestos; b) no es necesaria ninguna otra indicación; c) el uso pertinente de los datos ofrecidos se lleva a cabo según un esquema poniendo en juego procedimientos familiares en la etapa considerada (operaciones aritméticas, regla de tres, etc), reglas que entonces, se trata de movilizar y combinar de manera adecuada lo que constituye, por otra parte, el verdadero campo de acción del alumno, su margen de manejos e incertidumbre." (Chevallard, Y; Observaciones sobre la noción de contrato didáctico, 1981).

- Dentro de los problemas de la lista
- hay problemas en los que se pide la producción de una respuesta
 - hay problemas en los que se pide la producción de un procedimiento
 - hay problemas con una, varias, infinitas o ninguna solución

Todos estos aspectos se analizan cuidadosamente tratando de identificar las condiciones del enunciado que hacen que los problemas tengan una, varias, infinitas o ninguna solución.

La asistencia técnica propone un conjunto de situaciones que serán las que los docentes llevarán a las aulas.

Cabe destacar el entusiasmo y el compromiso con el que las participantes del grupo pusieron a prueba las situaciones planificadas. Luego de la primera puesta a prueba, se hizo un cuidadoso análisis de los registros de clase. A través de los mismos fue posible trabajar alrededor de la intervención docente en la clase al tiempo que se valorizó la importancia del registro de clase como un instrumento de capacitación docente. En este sentido se pensaron posibles devoluciones a los maestros que participaron de las situaciones.

Otro aspecto interesante se vincula con el hecho de que las situaciones previstas generaron mucha discusión entre los alumnos lo cual dio lugar a valorizar la pertinencia de las situaciones más abiertas cuando se pretende generar debate en la clase.

El registro de las situaciones de segundo y tercer grado permitió detectar que algunos aspectos de la situación no habían sido comprendidos por las profesoras. Efectivamente, una primera instancia de la secuencia planteaba que los alumnos formularan preguntas sobre un enunciado y clasificaran las preguntas como "aquellas en las que es necesario operar para obtener la respuesta" y aquellas en las que los datos se obtienen directamente". Esta actividad de clasificación fue omitida y la situación consistió en que los alumnos plantearan preguntas sin clasificarlas. La omisión da cuenta de que no quedó clara, en el momento de elaboración de la situación, la significación de la actividad de clasificación. Este hecho dio lugar a una discusión acerca del trabajo sobre enunciados que se puede hacer con los alumnos y acerca de la necesidad de proponer actividades que generen una "reflexión sobre el hacer" (recorregir preguntas, clasificarlas, etc) y no solamente "un hacer".

Muchos alumnos formulaban preguntas independientes del enunciado propuesto. En otras palabras, escribían un nuevo problema y no una pregunta sobre el enunciado ya dado. En esa circunstancia las docentes se encontraron sin elementos para reencausar la consigna.

El análisis de las situaciones, de las modificaciones propuestas a partir de la puesta en clase, de los registros obtenidos, se vuelcan en un documento que servirá como documento de capacitación a todos los maestros en el mes de julio. Este documento, elaborado por la asistencia técnica, a partir de los datos recogidos por las participantes del grupo, se anexa a este informe. (Anexo IV)

Los registros tomados de las clases y las observaciones de los docentes hacen evidente las carencias de los maestros en cuanto a la propuesta que hacen para el primer ciclo de la escuela primaria. Un ejemplo de ello es el temor en primer grado de proponer situaciones que comprometan números "altos", lo cual

ca cuenta de una concepción según la cual es necesario enseñar número por número partiendo de la noción de agrupamiento. Frente a esta realidad la asistencia técnica señala la necesidad de considerar la problemática de aprendizaje de sistema de numeración y de las operaciones aritméticas en el primer ciclo.

Al enfocar este tema con las docentes del grupo, se hizo un análisis de la enseñanza actual en relación con el sistema de numeración y las operaciones en el primer ciclo.

La modalidad que en general asume la enseñanza de la notación numérica puede caracterizarse así:

- Se establecen topes definidos por grado: en primer grado se trabaja con los números menores que cien, en segundo con los menores que mil y así sucesivamente. Recién en quinto grado se maneja la numeración sin restricciones.

- Una vez enseñados los dígitos, se introduce la noción de decena como conjunto resultante de la agrupación de diez unidades y sólo después se presenta formalmente a los niños la escritura del número diez, que debe ser interpretada como representación del agrupamiento (una decena, cero unidades). Se utiliza el mismo procedimiento cada vez que se presenta un nuevo orden.

- La explicitación del valor posicional de cada cifra en términos de "unidades", "decenas", etc. para los números de un cierto intervalo de la serie se considera requisito previo para la resolución de operaciones en ese intervalo.

- Se intenta "concretar" la numeración escrita materializando la agrupación en decenas o centenas.

Las últimas investigaciones acerca de la enseñanza del sistema de numeración ponen en tela de juicio los supuestos subyacentes a la propuesta antes caracterizada. Efectivamente esas investigaciones muestran que si se recorta tan drásticamente el universo de los números posibles, si no se favorece la comparación entre diferentes intervalos de la serie ni la búsqueda de regularidades, se está obstaculizando el acceso a las reglas que organizan el sistema de numeración.

Por otra parte es necesario revisar la relación que tradicionalmente se plantea entre el sistema de numeración y los algoritmos para realizar operaciones aritméticas. Esta relación es tradicionalmente vista como unidireccional: conocer las reglas del sistema es necesario para acceder a los algoritmos. Sin embargo esta perspectiva deja de lado la producción de algoritmos alternativos a los convencionales por parte de los niños.

Otro aspecto que se trabaja con los capacitadores se refiere a la utilización de ciertos recursos para materializar la noción de agrupamiento inherente a la organización de nuestro sistema de numeración. En general, estos recursos desnaturalizan el objeto que se está estudiando en tanto hacen desaparecer la posicionalidad del sistema.

La asistencia técnica solicita a los capacitadores que tomen contacto con las propuestas que circulan para los primeros grados en sus respectivos lugares y hagan un análisis crítico de las mismas.

Se analizan algunas investigaciones que indagaron acerca de

las conceptualizaciones de los niños a propósito del sistema de numeración y se tratan de establecer contenidos "intermedios" que permitan articular lo que los niños saben con lo que deben saber.

En tanto la propuesta que se discutió rompa de manera abrupta con lo que tradicionalmente se viene llevando a cabo en la escuela, se tuvo cuidado en diferenciar el nivel de análisis que puede hacerse en el equipo de multiplicadores con el nivel de difusión que se pueda plantear para todos los docentes. Esta diferenciación dio lugar a otra discusión delicada: las propuestas que se emitan desde el equipo de capacitadores deben contemplar de manera exhaustiva las posibilidades reales de implementación evitando dejar a cargo del docente decisiones que no corresponden al ámbito de su responsabilidad.

B.2 Trabajo con el equipo técnico

El equipo técnico de la dirección de planeamiento solicitó a la asistencia técnica la elaboración de un documento que recogiera el trabajo de capacitación hecho con los multiplicadores y que pudiera ser utilizado para la capacitación masiva de julio. Para ir concretando niveles de acción de las integrantes del grupo de multiplicadores, la asistencia técnica recomienda incluir a estos docentes como coordinadores de la instancia masiva de julio. Esta posibilidad será evaluada por la dirección de planeamiento en función de la posibilidad de reconocer las horas de trabajo correspondientes.

ANEXO I.

CONTENIDOS PARA CUARTO AÑO DE LA ESCUELA MEDIA

1) FUNCIONES

Contenidos Conceptuales

Funciones polinomiales. Ceros. Utilización de los ceros para la factorización. Positividad. Negatividad.
Funciones racionales e irracionales
Función exponencial. Función logarítmica

Contenidos procedimentales

Interpretación de las distintas expresiones algebraicas de una función polinómica: análisis de los elementos que pone de relieve cada expresión

Análisis de los intervalos de positividad y negatividad a partir de la expresión factorizada de una función polinómica

Anticipación de la forma de la curva correspondiente a partir del análisis de la expresión. Representación gráfica a partir de la utilización de utilitarios informáticos.

Determinación de la función polinómica de grado n dados $n+1$ puntos de la misma

Utilización del concepto de corrimiento para obtener las gráficas de las funciones del tipo $f(x) = a/x + b/cx + d$, a partir de la gráfica de la función $f(x) = 1/x$

Descripción verbal de fenómenos que pueden ser representados a través de una función exponencial, comparación con fenómenos de tipo lineal

Obtención de la función exponencial a partir de puntos

Obtención de la función exponencial a partir de un punto y la velocidad de crecimiento

Elección de una función que describa lo más ajustadamente posible un proceso

Aplicación de la función exponencial al concepto de vida media, edad de un fósil

Interpretación de fenómenos que pueden expresarse a través de funciones logarítmicas como inversos de fenómenos exponenciales

Análisis de la influencia de los parámetros en los distintos tipos de funciones estudiadas

2) ALGEBRA

Sistemas de ecuaciones lineales ($mx+n$).

Eliminaciones de Gauss Jordan.

Rango de un sistema lineal. Sistemas determinados, indeterminados, e incompatibles.

Matrices y sistemas lineales. Matriz de coeficientes asociada a un sistema lineal. Matriz ampliada.

Sistemas homogéneos. Utilización del método de Gauss para caracterizar los sistemas homogéneos indeterminados y los de solución única.

Introducción a la programación lineal.

1) Problemas en dos variables:

. Conjunto de restricciones y sistemas de inecuaciones

- lineales. Interpretación algebraica y gráfica.
 - . Función objetivo. Recta de utilidades constantes.
 - . Resolución por métodos gráfico y del punto esquina para problemas con solución única (se sugiere que en el caso de disponer de computadora se recurra también a algún utilitario adecuado, después de la conceptualización)
 - . Análisis de condiciones para que un problema tenga infinitas soluciones, sea no acotado, o no factible.
- II) Problemas en más de dos variables:
Planteo del problema

Ecuaciones racionales, irracionales, exponenciales y logarítmicas asociadas a las funciones estudiadas
Inecuaciones racionales, irracionales y exponenciales asociadas a las funciones estudiadas

Contenidos procedimentales

Representación de problemas a través de sistemas lineales
Interrelación entre enunciados de problemas y sistemas de ecuaciones
Análisis de las condiciones de un problema que hacen que tenga infinitas soluciones, solución única o ninguna solución
Formulación de preguntas a partir de un enunciado
Formulación de problemas que responden a un sistema dado
Comparación entre distintos problemas que responden al mismo sistema de ecuaciones
Búsqueda de parámetros para que el sistema cumpla determinadas condiciones
Selección de variables relevantes para la resolución de problemas de programación lineal en los que es necesario considerar más de tres variables
Dadas las restricciones de un problema de programación lineal en dos variables, búsqueda de una función objetivo que haga que el problema tenga infinitas soluciones
Formulación de problemas de programación lineal que respondan a un conjunto de restricciones dadas y a una función objetivo dada

3) GEOMETRIA

Contenidos conceptuales

Cónicas como lugar geométrico: su expresión referida a un sistema de coordenadas. Ecuación de la circunferencia, de la elipse, de la hipérbola y de la parábola.

Contenidos procedimentales

Determinación de la ecuación de una curva a partir de su caracterización en forma verbal
Construcción de las cónicas por puntos
Descripción y justificación de las construcciones de las cónicas

4) PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

Contenidos conceptuales

Distribución binomial
Distribución de frecuencias

Parámetros estadísticos: media y desviación típica. Uso de calculadora para el cálculo de parámetros.
Distribución de probabilidad de variables discretas y continuas. Histograma de áreas
Distribución normal
Distribuciones bidimensionales: idea de correlación

Contenidos procedimentales

Aplicación de la distribución binomial como modelo para la resolución de problemas

Cálculo de la media y la desviación típica en diferentes problemas

Identificación del gráfico correspondiente a una distribución normal, entre varios gráficos dados, a partir de media y su desviación típica.

Solamente para los bachilleratos con orientación en Ciencias, se introduce un nuevo eje:

5) LA DEMOSTRACION EN MATEMATICA

En tanto esta unidad aborda contenidos de tipo metodológico, no haremos la distinción entre contenidos conceptuales y procedimentales. Se trabajarán los siguientes aspectos

- Enunciados verdaderos y falsos
- Ejemplos y contraejemplos
- Deducción
- Demostraciones en conjuntos finitos e infinitos
- Dibujos y demostraciones en geometría

Como ya se comentara en un informe de avance, la demostración forma parte del modo de producir y comunicar el conocimiento matemático. Es por eso que los alumnos a través de la enseñanza de la matemática deberían apropiarse de algunas de las formas que se utilizan en esta disciplina para validar el producto de su actividad. En tanto contenido metodológico, el tema de la demostración atraviesa todos los contenidos que se abordan en la escuela y sería deseable que los estudiantes evolucionaran en cuanto a la manera de justificar sus trabajos, de elaborar argumentos para sostener un debate, de aceptar o rechazar propiedades. Para que este objetivo pueda cumplirse es necesario considerar, en cierto momento, el tema de la demostración como objeto de estudio y reflexión por parte de los estudiantes, estudio que debería llevar a explicitar cuáles son las reglas que caracterizan la argumentación en matemática y la distinguen de otro tipo de argumentaciones.

Es indudable que la práctica alrededor de un modo particular de argumentar y validar la actividad se convierte para el alumno en un instrumento intelectual de alto valor formativo que trasciende completamente la disciplina matemática. Es por eso que hemos pensado en tomar como objeto de enseñanza -para aquellos alumnos que tienen 5 o 6 horas de matemática semanales- el tema de la demostración.

Se piensa que el tratamiento de estos contenidos debe realizarse sobre temas específicos de matemática. Los intentos de

introducir elementos de lógica desvinculados de los contenidos matemáticos han dado sobradas muestras de fracaso porque los alumnos no establecen espontáneamente la relación entre esos contenidos lógicos y las reglas de validación en matemática. Por otra parte es necesario pensar en situaciones que generen algún interés en la demostración por eso pensamos que la posibilidad de trabajar sobre las cuestiones anteriores está estrechamente ligada a la posibilidad de generar la confrontación y el debate en el aula. En relación al contenido matemático elegido para reflexionar acerca de la demostración, nos ha parecido especialmente propicio el tomar algunas cuestiones de divisibilidad y teoría de números. Al respecto pueden considerarse algunos temas que aparecen en el libro "Aritmética Elemental en la Formación Matemática" de Enzo Gentile, Edición de la Olimpiada Matemática Argentina, 1991.

ANEXO II

Documento dirigido a los docentes de primer año de la escuela media. Este documento recupera las ideas trabajadas con el grupo de multiplicadores a propósito del eje Relaciones y Funciones.

Representaciones gráficas

Resaltábamos en la fundamentación del proyecto curricular la importancia de introducir el aspecto modelizador de la matemática en la enseñanza media. Esto significa -recordémoslo- realizar una propuesta didáctica a través de la cual el estudiante descubra la matemática como una herramienta útil para interpretar y analizar fenómenos o situaciones de diversa naturaleza. El trabajo de modelización exige seleccionar las variables que interesará estudiar particularmente, utilizar el lenguaje de la matemática para establecer relaciones entre las mismas, operar con las relaciones establecidas y reinsertar los resultados obtenidos en el problema original.

Elaborar el concepto de modelo implica comprender que dicho modelo está basado en una simplificación de la realidad, que la descripción que se logra es solo aproximada, que gracias a la sustitución del fenómeno real por el modelo es posible utilizar el aparato matemático -que no depende de la naturaleza concreta del fenómeno- para describir y predecir un conjunto de hechos que se produce bajo ciertas condiciones, que una mala elección del modelo da resultados que no responden a la realidad. En fin, es esencial que los estudiantes descubran el carácter anticipador de la matemática en el sentido de que permite predecir el resultado de experiencias no realizadas.

Una de las problemáticas vinculadas al proceso de modelización es la selección de formas apropiadas para representar el fenómeno que se intenta estudiar. Para que ello sea posible -estamos hablando de alumnos de la escuela media, no de matemáticos- es necesario proponer situaciones a través de las cuales los estudiantes puedan interpretar y producir distintas formas de representación. Es necesario además tener en cuenta que cada manera de representar un fenómeno pone de relieve algunos aspectos y oculta otros, lo cual exige a quien está ejerciendo una actividad modelizadora, tener capacidad para seleccionar en cada oportunidad aquellas representaciones mejor adaptadas al problema que se está resolviendo.

Las actividades que siguen apuntan a discutir con los alumnos distintos aspectos de la representación gráfica. Hemos seleccionado algunos problemas en los que el trabajo se centra en la interpretación de gráficos y otros en los que el desafío mayor consiste en producirlos. Hemos procurado además, que las actividades faciliten la interacción entre distintas formas de representación y en algunos casos que exijan que el estudiante elija cuál es la representación más adecuada.

ACTIVIDAD 1

Trabajar con un gráfico hecho sobre un sistema de coordenadas cartesianas, extraído del diario.

a) Proponer que los alumnos describan en forma escrita y por