Buenos Aires, 28 de junio de 1994.-

Señor Secretario General del
Consejo Federal de Inversiones
Ingeniero J. C. Ciácera
S/D

De mi mayor consideración:

Me dirijo a ustes con el objetivo de elevarle, para su evaluación, el informe final en relación al proyecto de asesoramiento pedagógico en el área de matemática, para la provincia de La Pampa, proyecto para el que fui contratada según consta en el expediente número 2310.

Sin otro particular saludo a usted muy atentamente

Patricia Sadovsky

Informe final acerca del proyecto de asesoramiento a la provincia de La Pampa en el área de matemática para los niveles primario y medio Expediente 2310

Patricia Sadovsky

20 de Junio de 1994

A. ACCIONES VINCULADAS AL NIVEL MEDIO

A.1 Del trabajo con la comisión de cambio curricular

La problemática abordada con la comisión de cambio curricular giró alrededor de tres cuestiones:

a) contenidos curriculares, especialmente los referidos al cuarto año del bachillerato;

b) estrategias de interacción con el conjunto de los docentes;

c) estrategias futuras de capacitación a partir de la constitución del equipo de multiplicadores;

d) interacción con la Universidad.

a) Contenidos curriculares

La tarea se centra en el ajuste de los contenidos para el ciclo basico y en la formulación de los contenidos para cuarto año.

Los datos recogidos a través de conversaciones con los docentes permiten detectar que es necesario reducir los contenidos de tercer año ya que la propuesta resulta abrumadora por su extensión. Este problema introduce la discusión acerca del uso del tiempo en el sistema de enseñanza. Por una parte, el planteo de muchos contenidos invalida la posibilidad de desplegar estrategias de enseñanza del tipo de las que se alientan desde el proyecto de cambio. Por otra parte, si se reducen los contenidos y los docentes no ponen en práctica un modelo de enseñanza basado en la elaboración del conocimiento por parte del alumno, se corre el riesgo de provocar un serio vaciamiento. Esta cuestión exige establecer un delicado equilibrio.

Otro aspecto que es necesario cuidar especialmente se refiere a la introducción de contenidos que son nuevos para los docentes y que, por lo tanto, los profesores necesitan estudiarlos y formular alrededor de los mismos una propuesta de trabajo. Si un programa incluye muchos contenidos nuevos para los docentes y si, además resulta muy extenso, serán esos contenidos nuevos los que seguramente se dejarán de lado a la hora de seleccionar propuestas de trabajo en el aula.

Las consideraciones anteriores llevan a revisar los contenidos planteados para el ciclo básico, tratando de poner atención en las cuestiones mencionadas. Como ya se señaló en otras oportunidades, los contenidos incluidos en el eje "Probabilidad y Estadística" son nuevos para los docentes. La aproximación superficial que ellos tienen a estos temas hace que, en la mayoría de los casos, se descarten como objetos de enseñanza. Por ese motivo se decide distribuir la enseñanza de los conceptos que se proponían para segundo y tercer años entre segundo, tercero y cuarto años. Es así como en el eje Probabilidades y Estadística se introducen las siguientes modificaciones:

SEGUNDO AÑO:

Se propone solamente la introducción al cálculo combinatorio y la parte de probabilidades pasa a tercer año.

TERCER AÑO

Introducción al concepto de probabilidad
Probabilidad y frecuencia relativa
(Se elimina de tercer año el tema "Distribución binomial"

En relación al eje Funcional, se propone que el estudio de las funciones exponenciales y logarítmicas pase cuarto año.
Se incorpora en tercer año la enseñanza de inecuaciones en una variable.

El esquema de contenidos planteado para cuarto año contempla tanto contenidos conceptuales como procedimentales. La decisión de incluir contenidos procedimentales había sido tomada como producto de discusiones realizadas en el año 1992 y las justificaciones correspondientes figuran en el informe final del primer proyecto de asistencia técnica.El planteo final de los contenidos para cuarto año figura en el Anexo I.

Un aspecto que aún queda sin resolver se refiere a la compatibilización del programa propuesto para cuarto año con las distintas modalidades de bachillerato que existen en la provincia las cuales se han mantenido provisoriamente hasta tanto se tengan más precisiones respecto de la implementación de la Ley Federal de Educación. El caso más urgente se refiere al único bachillerato en ciencias que existe en la provincia -se dicta en General Pico- ya que su antiguo plan contempla la asignatura "Estadística" para quinto año, mientras que el plan presentado a través del proyecto de cambio propone distribuir los contenidos de Estadística y Probabilidades a lo largo de los cinco años de bachillerato. La asistencia técnica considera que habrá que prever para el ciclo 1995 una modificación de los contenidos de la asignatura Estadística para quinto año del bachillerato en Ciencias que tenga en cuenta los nuevos lineamientos curriculares.

b) Estrategias de interacción con el conjunto de los docentes

Existen en este momento en la provincia dificultades para ofrecer al conjunto de los docentes instancias de capacitación. Esta realidad genera obstáculos importantes en el proceso de apropiación por parte de los docentes de la propuesta curricular. En interacción con la comisión de cambio curricular, la asistencia técnica ha considerado que una manera de contribuir a contrarrestar los efectos negativos de la falta de reuniones, es enviar materiales escritos en los que los docentes puedan apoyarse para preparar sus clases. Teniendo en cuenta esta consideración se ha realizado una selección de textos que los docentes han recibido en sus escuelas. Esta actitud recoge un análisis hecho oportunamente, a través del cual se evaluaba la dificultad de lograr la implementación del curriculum, entre otras causas, por la carencia de textos que planteen un enfoque similar al del proyecto de cambio.

Por disposición de las autoridades de la provincia, durante el receso de invierno los profesores participarán de una instancia de capacitación autogestiva. Para ello, la Dirección de Enseñanza Media y Superior solicitó a la asistencia técnica, la elaboración de un material que pudiera utilizarse como base de esa capacitación. La asistencia técnica elaboró un documento que se adjunta en el Anexo III.

c) Estrategias futuras de capacitación a partir de la constitución del equipo de multiplicadores.

En la instancia de Julio los docentes del grupo de multiplicadores actuarán como coordinadores del resto de los docentes. Será esta la primera oportunidad que tendrán de ejercer un rol de capacitación. Sin embargo, no han quedado definidas líneas de acción permanentes por parte del grupo de multiplicadores. Es necesario estructurar un plan de capacitación que incorpore la acción de algunos de los docentes que participaron de este grupo de trabajo. La asisitencia técnica evaluó la actuación de cada uno de los participantes y recomendó la incorporación de algunos docentes a una estructura de capacitación.

d) Interacción con la Universidad

Se iniciaron acciones tendientes a establecer una articulación entre la escuela media y la Universidad. Para ello se realizaron reuniones entre la asistencia técnica, la comisión de cambio curricular y representantes de las distintas facultades de la Universidad. Participaron de estas reuniones profesores de la facultad de Ciencias Exactas, de Ingeniería, de Ciencias Económicas y de Agronomía. La asistencia técnica expuso los fundamentos de la propuesta del área de matemática, explicó los principales cambios de contenidos y comentó acerca del estado de apropiación del proyecto por parte de los docentes de la escuela media. Asimismo se solicitó a los docentes universitarios que realicen una lectura de los documentos elaborados hasta el momento y que formulen sugerencias principalmente en lo que se refiere a los contenidos para cuarto y quinto años. En general los profesores universitarios manifestaron acuerdo con las propuestas curriculares y comprometieron su colaboración. Quedó planteada además la necesidad de revisar los planes de formación de los profesorados universitarios, y de coordinar las ofertas de capacitación docente que se puedan implementar tanto desde el Ministerio como desde la Universidad.

A.2 Trabajo con multiplicadores

Durante las jornadas de trabajo con el equipo de multiplicadores se abordaron los siguientes temas:

- Relaciones y Funciones
- Número real
- Introducción al razonamiento deductivo
- Abordajes en geometría

La asistencia técnica propone trabajar alrededor de la selección y análisis de situaciones didácticas. La tarea resulta desafiante para los participantes, generándose desde el comienzo un clima de producción y entusiasmo. Es notorio el cambio de actitud respecto de los primeros encuentros en los cuales la mayoría de los docentes se ubicaba en una posición defensiva que los llevaba a repetir el "discurso" del proyecto de cambio sin ninguna convicción. Por el contrario, en esta oportunidad, la mayoría de los profesores se ubica como un equipo de trabajo que discute, revisa, intercambia opiniones, reflexiona sobre su propia práctica, piensa delante de sus colegas... La asistencia técnica considera que influyen para este cambio de actitud tres factores: 1) los problemas que se generan en cada institución debido a la falta de seguimiento del proyecto en el área de matemática ponen en primer plano la necesidad de producir un cuerpo de ideas que se constituya en una referencia más concreta que el documento curricular; 2) el hecho de vislumbrar la responsabilidad que significa asumir tareas de capacitación docente; 3) la producción y los resultados que pueden exhibir quienes más se han apropiado de las propuestas difundidas a través de las diversas instancias de capacitación que se han ofrecido.

Al abordar la problemática de Relaciones y Funciones, se discute en primer lugar acerca de criterios generales para enfocar la enseñanza de los contenidos -tanto conceptuales como procedimentales- vinculados a este eje. En ese sentido se revisa el planteo tradicional de comenzar enseñando relaciones en conjuntos finitos para luego plantear la función como un caso particular de relación. Los ejemplos -se analiza- que se proponen en general para el tratamiento de relaciones en conjuntos finitos son poco sustanciosos respecto de los aprendizajes que comprometen. Sigue existiendo en ese enfoque la tendencia a confundir concepto con forma de representación. Se propone entonces comenzar planteando relaciones de tipo funcional en conjuntos infinitos, sin detenerse a diferenciar relación de función.

La secuencia de trabajo alrededor de la cual se discute constituye la base de un documento para el conjunto de los docentes que ha elaborado la asistencia técnica y que se incluye como parte de este informe en el Anexo II. En este documento se explicita, para cada situación: a qué aprendizajes se apunta a través de la situación, qué discusiones debería promover el docente, cuál es el sentido de las preguntas que se plantean. Proponer situaciones sin el correspondiente análisis es alentar la actitud de muchos profesores de reducir la enseñanza de la matemática a la elaboración de guías de ejercicios para los alumnos.

Dentro del eje Relaciones y Funciones se aborda el estudio de la proporcionalidad a través de una secuencia para que los participantes analicen. La misma apunta a la comprensión de los elementos necesarios para caracterizar una situación de proporcionalidad directa: constante de proporcionalidad y elección de unidades en el dominio y la imagen. Es interesante señalar que la formulación numérica de la proporcionalidad, esto es la formulación desvinculada de un contexto particular de funcionamiento, exige solamente la determinación de la constante para definir la función. La necesidad de elegir una unidad de medida tanto en el dominio como en la imagen- queda diluida cuando se parte de la definición matemática del concepto y luego se lo intenta aplicar. Vuelve a discutirse a propósito de la secuencia que se analiza, acerca de las implicancias de la elección de un determinado modelo didáctico. En ese sentido se explicita -una vez más- hasta qué punto el modelo "aprendo, aplico" oculta el verdadero funcionamiento de los conceptos que se pretende enseñar.

A partir del análisis de la enseñanza del eje numérico se vuelven a discutir la distintas dimensiones del análisis didáctico. Al respecto se trabaja sobre las siguientes cuestiones:

- **Opciones globales.** En relación al contenido que se estaba enfocando (números racionales no negativos) se discutieron los diferentes sentidos que se trabajarán: racionales medida, racionales constante de proporcionalidad en una relación de proporcionalidad directa.

- **Variables didácticas sobre las que se operará.** A propósito de los números racionales no negativos, se propusieron ejemplos de situaciones en las que, al variar ciertas condiciones, varían tanto los procedimientos como las propiedades que ponen en juego quienes aprenden.

-**Posibles procedimientos de resolución.** Se hizo un análisis en el que se relacionaron los procedimientos que utilizan los alumnos con las propiedades (correctas o no) en las que se apoyan esos procedimientos.

- **Formas de validación que ofrece la situación.** En relación a esta cuestión, los profesores expusieron las dificultades de los alumnos para controlar los resultados de su producción. Es por eso que -señaló la asistencia técnica- es necesario gestionar la validación desde la situación misma. Esto significa prever tanto pruebas de tipo pragmático como incluir consignas que movilicen en el alumno estrategias para rechazar lo erróneo y aceptar lo correcto.

- **Contextos de utilización.** Se propusieron ejemplos de problemas que, vistos desde su formulación matemática son idénticos y que, sin embargo, generan en el alumno estrategias de resolución muy diferentes. Se analizó, a propósito de los ejemplos planteados, que no es suficiente ser exhaustivo en cuanto a los contextos que se proponen sino que, es necesario, además, provocar la comparación entre los mismos.

- **Análisis e integración de diferentes formas de representación.** Este plano del análisis didáctico había sido muy trabajado a propósito de la secuencia elaborada para el eje "relaciones y funciones"; en esta instancia se retomó con ejemplos vinculados a los números racionales.

Se propuso elaborar una secuencia para la enseñanza de números racionales en primer año. La primera situación que se analizó involucra la división entre enteros. Se discutió que este aspecto del funcionamiento de la fracción puede englobarse en el tema "medida". Se eligieron números que den lugar a varios procedimientos posibles y se acordó en señalar que si los alumnos no propusieran las distintas alternativas previstas, el docente debería provocarlas de alguna manera. A continuación se propuso como parte de la actividad justificar la equivalencia entre los procedimientos discutidos. Luego se propusieron otras situaciones similares que apunten a discutir con los alumnos que si se reparten a objetos fraccionables entre b personas, cada una recibe a/b. Otro aspecto que se previó discutir con los alumnos a propósito de la situación propuesta es el de comparación de distitnos números racionales. En relación con las situaciones de división entre enteros se analizó la siguiente ecuación

b personas x para cada persona = a objetos

y se plantearon situaciones dejando, alternativamente fijo uno de los términos y haciendo variar los demás. Esto supone establecer tres posibles tablas de proporcionalidad. En relación a las mismas se anticiparon las siguientes discusiones con los alumnos

- cuál es el significado de la constante en cada caso?

- cómo funcionan las propiedades de la proporcionalidad directa en cada caso? Se anticipó aquí que es posible obtener el resultado de ciertas operaciones entre fracciones a partir de aplicar las propiedades, aun cuando no se utilicen los algoritmos convencionales.

A continuación se propuso el análisis de tablas de proporcionalidad idénticas desde el punto de vista numérico que tienen significaciones distintas según el contexto. Por ejemplo se propuso comparar las siguientes situaciones

> "En primero A, 4 de cada 7 chicos concurren al campamento. Hacer una tabla que relacione cantidad total de alumnos con alumnos que viajan"
>
> "Para hacer la mezcla es necesario poner 4 partes de aguarrás por cada 7 partes de barniz. Hacer una tabla que relacione las partes de barniz con las correspondientes de aguarras".

Sucede en este caso, que las dos tablas son idénticas desde el punto de vista numérico. En ambas situaciones la constante de proporcionalidad es 4/7; sin embargo, en la primera, 4/7 establece una relación parte-todo y en la segunda una relación parte-parte. Por otra parte, la primera relación supone dominio e imagen naturales mientras que la segunda admite dominio e imagen racionales. Se remarcó la necesidad de provocar en los alumnos la comparación entre ambas situaciones.

El grupo de problemas que se discutieron luego, apunta a trabajar alrededor de la noción de conmensurabilidad. La situación propuesta es el siguiente:

> La clase se divide en 6 grupos. A cada grupo se le entrega un par de varillas de madera (no flexibles) de las siguientes medidas:

grupo 1	grupo 2	grupo 3	grupo 4	grupo 5	grupo 6
7 cm	5 cm	5 cm	4 cm	6 cm	10 cm
4 cm	8 cm	7 cm	9 cm	8 cm	8 cm

Consigna: Cada grupo recibió un par de varillas. Encuentren la medida de la varilla más grande, si se considera como unidad la varilla más chica. No pueden usar regla, ni pueden marcar con lápiz la varilla. En el aula hay disponibles más varillas como las que tienen, si las necesitan pueden usarlas.

Por qué varillas de madera? Porque se desea bloquear la posibilidad de que los alumnos plieguen las varillas para movilizar el procedimiento consistente en colocarlas consecutivamente hasta conseguir con las dos clases de varillas la misma longitud. Se apunta a discutir con los alumnos alrededor de las siguientes ideas: decir que, por ejemplo, 4 veces la longitud a es igual a 7 veces la longitud b, es lo mismo que decir que **a** es 7/4 **b**, y esto es lo mismo que decir que 1/4 **b** "entra" 7 veces en **a** de manera tal que existe una unidad (1/4 **b**) que entra un número entero de veces en **a** y en **b**. Por este hecho se dice que **a** y **b** son conmensurables.

Una vez que cada grupo obtuvo la medida se anotan en el pizarrón todos los resultados y se discute acerca de los procedimientos utilizados.

A continuación se propuso una situación de comunicación en el aula: la clase se divide en una cantidad par de grupos, y se trabaja por pares de grupos. El docente da a cada grupo una unidad de medida (desconocida para los otros grupos). Todos los grupos deben medir (con su unidad) el mismo objeto y luego comunicar al grupo que trabaja en relación con ellos la medida obtenida; con esta información, el grupo receptor de la informació.. debe dibujar la unidad de medida del grupo que emitió la información. Esta situación admite una validación pragmática (la medida dibujada es o no igual a la del grupo que emitió la información) que deberá ser complementada con una forma de validación intelectual.

Se propone trabajar la noción de densidad alrededor de una situación basada en un trabajo de R. Douady. En este caso -también se trata de una situación de comunicación- los alumnos trabajan separados en dos grupos: el grupo que pregunta (P) y el grupo que responde (R). El docente propone una fracción al grupo R ubicada entre 5 y 10 sin que el grupo P conozca cuál es. A través de preguntas que sólo pueden responderse por sí o por no, el grupo P debe situar un intervalo lo más pequeño posible en el que se encuentra la fracción. Luego se intercambian los roles. Gana el equipo que ubica el intervalo con mayor precisión.

En general, el grupo P comienza planteando intervalos cuyos extremos son fracciones del tipo $a/2^n$ pero luego descartan esta posibilidad (les resulta poco económica cuando se achica la longitud del intervalo) y pasan a trabajar con fracciones del tipo $a/10^n$. En este caso se espera que el grupo R movilice la idea de que resulta cómodo responder a la preguntas descomponiendo la fracción dada en suma de fracciones decimales. Haciendo esto, al tiempo que se sitúa la fracción con una precisión arbitraria se elabora el concepto de división decimal entre enteros. El interés de la situación reside también en el hecho de que permite que los alumnos comprendan cómo aproximar una fracción cualquiera a través de fracciones decimales.

Durante las jornadas se insistió en el tipo de discusiones que deberían generarse a través de las situaciones propuestas.

La discusión acerca del papel de la demostración en la escuela media, se desarrolló a propósito del análisis de diferentes enfoques para la enseñanza de la geometría.

Se discutieron algunos problemas que ayudaría a que los alumnos comprendan el sentido de la demostración en matemática. Se insistió en la falta de articulación entre la propuesta de la escuela primaria basada en lo experimental y en lo perceptivo, y la presentación axiomática de la geometría. El análisis de algunas situaciones propuestas en un material de C. Laborde (1) sobre enseñanza de la geometría posibilitó volver a trabajar sobre concepto de variable didáctica que ya había sido tratado en relación a otros contenidos. La situación que plantea C. Laborde es la siguiente

Construir el eje de simetría de un trapecio isósceles
a) plegando la figura
b) utilizando regla graduada
c) utilizando regla no graduada

Para realizar la tarea a) el alumno utiliza solamente la percepción, para cumplir con la consigna b) es necesario poner en juego el hecho de que el eje de simetría pasa por el punto medio del segmento determinado por un par de puntos simétricos mientras que el problema c) exige utilizar el hecho de que los puntos unidos en una simetría ortogonal pertenecen al eje de simetría.

En la situación anterior los materiales que se utilizan actúan como variables didácticas en la medida en que modifican sustancialmente las propiedades empleadas para resolver el problema. Es interesante señalar que en tanto en el caso a) el control que hace el alumno del resultado de su actividad es de tipo pragmático - se trata de plegar- en los casos b) y c) el control de la actividad está dado por la puesta en juego de propiedades relativas a la simetría ortogonal.

La selección de los materiales como variables didácticas proviene en este caso de un análisis del concepto y de sus propiedades; en este sentido se diferenció este ejemplo de otros que se habían trabajado en otras instancias en los que es el análisis de los procedimientos de los alumnos y no de las propiedades del concepto lo que lleva a operar sobre las variables descriptas.

A.3 Del trabajo con el conjunto de los docentes

Se ha realizado una jornada con el conjunto de docentes de cuarto año con el objetivo de explicitar aspectos de la implementación del programa. La reunión generó una gran espectativa ya que los profesores se encontraban desorientados

(1) Laborde,C.(1988) "Problemes de l'enseignement de la géométrie au college". Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. IREM de Strasbourg.

en relación con la puesta en marcha de los contenidos. Cabe aclarar que la mayoría de los participantes asistían por primera vez a una instancia de capacitación, lo cual significa que estos docentes no han tenido en general contacto con los lineamientos propuestos en el proyecto de cambio.

Esta circunstancia se debe a dos motivos: por una parte, este año se han incorporado al sistema muchos docentes nuevos, por otra parte, los profesores del ciclo superior no dan clase en el ciclo básico.

Las mayores dudas que se explicitaron se vinculan con los alcances previstos para el eje de álgebra lineal y para el eje funcional.

En relación al eje funcional la asistencia técnica recordó que dicho eje se propone como uno de los ejes estructurantes del plan de estudios a lo largo de los cinco años y que, en ese sentido, es necesario tener claridad respecto de cuáles son los avances que se proponen en cada uno de los cursos.

Se consideró en primer término el enfoque relativo a funciones polinomiales. Se recomendó trabajar con fórmulas factorizadas y plantear a los alumnos la anticipación de la representación gráfica a partir del análisis de la expresión correspondiente. Se recalcón entonces la necesidad de hacer interactuar los marcos algebraico y gráfico haciendo funcionar uno de ellos como elemento de control del otro. La asistencia técnica propuso trabajar con funciones del tipo

$$f(x) = (x-a)^n (x-b)^p$$

analizando positividad negatividad y ceros al considerar la paridad de n y de p. La mayoría de los docentes se mostraron sorprendidos por la posibilidad de anticipar la forma de la curva a partir del análisis de la expresión algebraica, explicitando que, para ellos, se trataba de un planteo novedoso.

La asistencia técnica sugirió proponer a los alumnos ejercicios en los que se pide encontrar una función polinómica dadas ciertas condiciones:

- encontrar una función polinómica de grado n que tenga como ceros a los números a y b y discutir la cantidad de soluciones;
- encontrar la función polinómica de grado n que pase por un conjunto de puntos dados y discutir la cantidad de soluciones.

Este último punto se vinculó con la discusión acerca de sistemas lineales, señalando que el problema mencionado puede ser una oportunidad interesante de "hacer funcionar" la compatibilidad o incompatibilidad de los sistemas lineales. Cabe aclarar que, en este contexto, "hacer funcionar" significa proponerse que los alumnos puedan interpretar la discusión acerca de los sistemas en términos de existencia o no de las funciones que se pidan y puedan discutir esa existencia tanto desde el análisis algebraico del sistema como desde la interpretación gráfica del problema. Nuevamente -se recalca- se propone hacer interactuar el marco gráfico con el algebraico.

El tratamiento de otras funciones algebraicas propuestas en el programa se desarrolla de manera similar.

Las funciones exponenciales se discuten con bastante profundidad. Se insiste en el análisis de fenómenos que pueden ser descriptos a través de modelos exponenciales, con independencia de la fórmula. Se propone que el análisis del papel que juegan los parámetros se realice a partir de la comparación de fenómenos del mismo tipo y finalmente se señala el interés de tratar la función logarítmica a partir del análisis de los mismos fenómenos tratados mediante funciones exponenciales (crecimiento de poblaciones, tasas de interés, etc).

Al considerar las ecuaciones -algebraicas y trascendentes- asociadas a las funciones que se trabajan, se remarcó la importancia de prever algún mecanismo anticipatorio que funcione al mismo tiempo como elemento de control.

La asistencia técnica propone a los asistentes resolver el siguiente problema:

Se vuelca liquido en un recipiente cuya forma es la del dibujo. Representar gráficamente la altura del liquido en función del volumen que se vuelca.

Al plantear el problema la asistencia técnica se proponía analizar con los docentes la complejidad del problema y las posibles discusiones que se podrían generar con los alumnos a propósito de su resolución. La mayoría de los docentes tuvo grandes dificultades para resolver el problema, lo cual sin duda vuelve a poner sobre el tapete la urgencia de poner en marcha un plan de capacitación que tenga cierta continuidad. El interés de este problema reside en que la selección de variables queda a cargo de quien lo está resolviendo, lo cual aumenta considerablemente la complejidad del mismo. Como es natural suponer, los docentes explicitan que se trata de un problema dificil para los alumnos. La asistencia técnica vuelve entonces sobre uno de los objetivos planteados en la fundamentación del Área de matemática: la utilización de los conceptos matemáticos en tanto modelos para resolver problemas supone la selección de variables pertinentes, capacidad que no es usualmente puesta en juego a partir de los problemas más clásicos ya que en estos el alumno empieza a interactuar con el problema una vez que las variables ya han sido seleccionadas.

Surge entonces una discusión alrededor del nivel de dificultad que es pertinente exigir. La asistencia técnica insiste en diferenciar aquello que es exigible aunque no evaluable para la acreditación de aquello que se exige para acreditar. En general los docentes tienen dificultades para reconocer esta diferenciación. La asistencia técnica explicita que este tipo de problemas podrían constituir "proyectos" de trabajo para los alumnos en tanto pueden ser concebidos como problemas que trascienden el marco de una clase y sobre los cuales los alumnos volverán una y otra vez, ensayando resoluciones parciales hasta obtener una resolución satisfactoria. La propuesta sería que los alumnos se hagan cargo de ciertos problemas -trabajando en grupo o individualmente- y que consulten al docente a medida que avanzan en la resolución.Este tipo de práctica -más cercana a la idea de problema científico que a la de problema escolar- es considerada como posible por algunos docentes y -por supuesto- descartada por muchos al considerarla alejada de las posibilidades de sus alumnos.

En relación al eje de álgebra lineal se aclara que el programa no plantea el tratamiento específico de matrices sino que éstas se trabajarán únicamente vinculadas a "matriz de los coeficientes de un sistema lineal". La asistencia técnica propone un trabajo alrededor de enunciados de problemas que se resuelven a través de sistemas lineales. Se trabaja sobre un enunciado de datos **sin preguntas** y se les pide a los docentes que formulen preguntas que puedan ser respondidas a partir de los datos dados. La tarea resulta trabajosa para los profesores, lo cual da lugar a que tomen conciencia de las dificultades implícitas en la resolución de este tipo de problemas que, en general, no encuentran espacio de reflexión en las clases.

Esta actividad es aprovechada por la asistencia técnica para considerar la cuestión de los contenidos procedimentales como objeto de enseñanza.

La mayoría de los docentes desconoce el tema de programación lineal. La asistencia técnica explica algunos aspectos a tener en cuenta, fundamentalmente los referidos a la discusión de cantidad de soluciones. Se insiste en recomendar un tratamiento profundo del tema en dos variables y el planteo de problemas en más variables cuya solución se encontrarán a través de algún utilitario informático.

B. ACCIONES VINCULADAS AL NIVEL PRIMARIO

B.1 Trabajo con el equipo de multiplicadores

Según el plan de capacitación diseñado en diciembre de 1993, la tarea se centra en la elección, análisis , puesta a prueba, registro y análisis a posteriori de situaciones didácticas, una para cada ciclo. Dado el desfasaje de tiempos producido, la asistencia técnica decide que las situaciones a analizar se refieran a un contenido que es transversal a todo el proceso de aprendizaje: resolución de problemas. Esta opción dariá la posibilidad de poner a prueba las situaciones durante el período lectivo 1993, aun a una altura avanzada del año. La asistencia técnica, fundamenta la consideración del tema "resolución de problemas" como un objeto de enseñanza. Esto es la explicitación de ciertas capacidades como contenidos de enseñanza

- interpretación de enunciados
- análisis de enunciados y clasificación según diferentes criterios
- organización de datos
- relación entre los datos numéricos, las operaciones y el enunciado
- producción de preguntas a propósito de un enunciado
- clasificación de las preguntas a propósito de un enunciado
- reconocimiento de la información presentada distintas formas de representación: textos, tablas, dibujos, esquemas, gráficos, historietas
- organización de la comunicación de los resultados

La asistencia técnica señala que es frecuente escuchar quejas de los maestros en cuanto a las capacidades de los alumnos para resolver problemas. "El problema es que no saben leer" "Los alumnos no pueden interpretar las lecturas" " No se trata de un problema de matemática sino de lengua" son frases que emiten con facilidad los docentes de distintos lugares. La asistencia técnica señala la necesidad de que la enseñanaza de la matemática se haga cargo de esta dificultad tomando como una problemática que le compete, la interpretación de los enunciados de problemas.

Los participantes acuerdan con la pertinencia del tema elegido. Una de las primeras actividades realizadas con el grupo de multiplicadores consiste en analizar y clasificar una lista de problemas. La idea es empezar a diferenciar distintos tipos de problemas. Se trabaja sobre la noción de contrato didáctico a propósito de los problemas escolares. "El contrato didáctico comporta, en efecto, una cláusula "regional" (válida para todos los problemas que se puedan proponer en el marco didáctico escolar) en cuyos términos:
1. Un problema planteable posee una respuesta y sólo una (aceptable en el sentido del contrato).
2. Para llegar a esta respuesta: a) deben utilizarse todos los datos propuestos; b) no es necesaria ninguna otra indicación; c) el uso pertinente de los datos ofrecidos se lleva a cabo según un esquema poniendo en juego procedimientos familiares en la etapa considerada (operaciones aritméticas, regla de tres, etc), reglas que entonces, se trata de **movilizar y combinar de manera adecuada** lo que constituye, por otra parte, el verdadero campo de acción del alumno, su margen de manejos e incertidumbre." (Chevallard, Y; Observaciones sobre la noción de contrato didáctico, 1981).

Dentro de los problemas de la lista

- hay problemas en los que se pide la producción de una respuesta
- hay problemas en los que se pide la producción de un procedimiento
- hay problemas con una, varias, infinitas o ninguna solución

Todos estos aspectos se analizan cuidadosamente tratando de identificar las condiciones del enunciado que hacen que los problemas tengan una, varias, infinitas o ninguna solución.

La asistencia técnica propone un conjunto de situaciones que serán las que los docentes llevarán a las aulas.

Cabe destacar el entusiasmo y el compromiso con el que las participantes del grupo pusieron a prueba las situaciones planificadas. Luego de la primera puesta a prueba, se hizo un cuidadoso análisis de los registros de clase. A través de los mismos fue posible trabajar alrededor de la intervención docente en la clase al tiempo que se valorizó la importancia del registro de clase como un instrumento de capacitación docente. En este sentido se pensaron posibles devoluciones a los maestros que participaron de las situaciones.

Otro aspecto interesante se vincula con el hecho de que las situaciones previstas generaron mucha discusión entre los alumnos lo cual dio lugar a valorizar la pertinencia de las situaciones más abiertas cuando se pretende generar debate en la clase.

El registro de las situaciones de segundo y tercer grado permitió detectar que algunos aspectos de la situación no habían sido comprendidos por las profesoras. Efectivamente, una primera instancia de la secuencia planteaba que los alumnos formularan preguntas sobre un enunciado y clasificaran las preguntas como "aquellas en las que es necesario operar para obtener la respuesta" y aquellas en las que los datos se obtienen directamente". Esta actividad de clasificación fue omitida y la situación consistió en que los alumnos plantearan preguntas sin clasificarlas. La omisión da cuenta de que no quedó clara, en el momento de elaboración de la situación, la significación de la actividad de clasificación. Este hecho dio lugar a una discusión acerca del trabajo sobre enunciados que se puede hacer con los alumnos y acerca de la necesidad de proponer actividades que generen una "reflexión sobre el hacer" (recorregir preguntas, clasificarlas, etc) y no solamente "un hacer".

Muchos alumnos formulaban preguntas independientes del enunciado propuesto. En otras palabras, escribían un nuevo problema y no una pregunta sobre el enunciado ya dado. En esa circunstancia las docentes se encontraron sin elementos para reencausar la consigna.

El análisis de las situaciones, de las modificaciones propuestas a partir de la puesta en clase, de los registros obtenidos, se vuelcan en un documento que servirá como documento de capacitación a todos los maestros en el mes de julio. Este documento, elaborado por la asistencia técnica, a partir de los datos recogidos por las participantes del grupo, se anexa a este informe. (Anexo IV)

Los registros tomados de las clases y las observaciones de los docentes hacen evidente las carencias de los maestros en cuanto a la propuesta que hacen para el primer ciclo de la escuela primaria. Un ejemplo de ello es el temor en primer grado de proponer situaciones que comprometan números "altos", lo cual ca cuenta de una concepción según la cual es necesario enseñar número por número partiendo de la noción de agrupamiento. Frente a esta realidad la asistencia técnica señala la necesidad de considerar la problemática de aprendizaje de sistema de numeración y de las operaciones aritméticas en el primer ciclo.

Al enfocar este tema con las docentes del grupo, se hizo un análisis de la enseñanza actual en relación con el sistema de numeración y las operaciones en el primer ciclo.

La modalidad que en general asume la enseñanza de la notación numérica puede caracterizarse así:

- Se establecen topes definidos por grado: en primer grado se trabaja con los números menores que cien, en segundo con los menores que mil y así sucesivamente. Recièn en quinto grado se maneja la numeración sin restricciones.

- Una vez enseñados los dígitos, se introduce la noción de decena como conjurto resultante de la agrupación de diez unidades y sólo después se presenta formalmente a los niños la escritura del número diez, que debe ser interpretada como representación del agrupamiento (una decena, cero unidades). Se utiliza el mismo procedimiento cada vez que se presenta un nuevo orden.

- La explicitación del valor posicional de cada cifra en términos de "unidades", "decenas", etc. para los números de un cierto intervalo de la serie se considera requisito previo para la resolución de operaciones en ese intervalo.

- Se intenta "concretar" la numeración escrita materializando la agrupación en decenas o centenas.

Las últimas investigaciones acerca de la enseñanza del sistema de numeración ponen en tela de juicio los supuestos subyacentes a la propuesta antes caracterizada. Efectivamente esas investigaciones muestran que si se recorta tan drásticamente el universo de los números posibles, si no se favorece la comparacion entre diferentes intervalos de la serie ni la búsqueda de regularidades, se está obstaculizando el acceso a las reglas que organizan el sistema de numeración.

Por otra parte es necesario revisar la relación que tradicionalmente se plantea entre el sistema de numeración y los algoritmos para realizar operaciones aritméticas. Esta relación es tradicionalmente vista como unidireccional: conocer las reglas del sistema es necesario para acceder a los algoritmos. Sin embargo esta perspectiva deja de lado la producción de algoritmos alternativos a los convencionales por parte de los niños.

Otro aspecto que se trabaja con los capacitadores se refiere a la utilización de ciertos recursos para materializar la noción de agrupamiento inherente a la organizacion de nuestro sistema de numeración. En general, estos recursos desnaturalizan el objeto que se está estudiando en tanto hacen desaparecer la posicionalidad del sistema.

La asistencia técnica solicita a los capacitadores que tomen contacto con las propuestas que circulan para los primeros grados en sus respectivos lugares y hagan un análisis crítico de las mismas.

Se analizan algunas investigaciones que indagaron acerca de las conceptualizaciones de los niños a propósito del sistema de numeración y se tratan de establecer contenidos "intermedios" que permitan articular lo que los niños saben con lo que deben saber.

En tanto la propuesta que se discutió rompe de manera abrupta con lo que tradicionalmente se viene llevando a cabo en la escuela, se tuvo cuidado en diferenciar el nivel de análisis que puede hacerse en el equipo de multiplicadores con el nivel de difusión que se pueda plantear para todos los docentes. Esta diferenciación dio lugar a otra discusión delicada: las propuestas que se emitan desde el equipo de capacitadores deben contemplar de manera exhaustiva las posibilidades reales de implementación evitando dejar a cargo del docente decisiones que no corresponden al ámbito de su responsabilidad.

B.2 Trabajo con el equipo técnico

El equipo técnico de la dirección de planeamiento solicitó a la asistencia técnica la elaboración de un documento que recogiera el trabajo de capacitación hecho con los multiplicadores y que pudiera ser utilizado para la capacitación masiva de julio. Para ir concretando niveles de acción de las integrantes del grupo de multiplicadores, la asistencia técnica recomienda incluir a estos docentes como coordinadores de la instancia masiva de julio. Esta posiblidad será evaluada por la dirección de planeamiento en función de la posibilidad de reconocer las horas de trabajo correspondientes.

ANEXO I.

CONTENIDOS PARA CUARTO AÑO DE LA ESCUELA MEDIA

1) FUNCIONES

Contenidos Conceptuales

Funciones polinomiales. Ceros. Utilización de los ceros para la factorización. Positividad. Negatividad.
Funciones racionales e irracionales
Función exponencial. Función logarítmica

Contenidos procedimentales

Interpretación de las distintas expresiones algebraicas de una función polinómica: análisis de los elementos que pone de relieve cada expresión
Análisis de los intervalos de positividad y negatividad a partir de la exprersión factorizada de una función polinómica
Anticipación de la forma de la curva correspondiente a partir del análisis de la expresión. Representación gráfica a partir de la utilización de utilitarios informáticos.
Determinación de la función polinómica de grado n dados n+1 puntos de la misma
Utilización del concepto de corrimiento para obtener las gráficas de las funciones del tipo f(x) = a x + b/c x + d, a partir de la gráfica de la función f(x) = 1/x

Descripción verbal de fenómenos que pueden ser representados a través de una función exponencial, comparación con fenómenos de tipo lineal
Obtención de la función exponencial a partir de puntos
Obtención de la función exponencial a partir de un punto y la velocidad de crecimiento
Elección de una función que describa lo más ajustadamente posible un proceso
Aplicación de la función exponencial al concepto de vida media, edad de un fósil
Interpretación de fenómenos que pueden expresarse a través de funciones logarítmicas como inversos de fenómenos exponenciales
Análisis de la influencia de los parámetros en los distintos tipos de funciones estudiadas

2) ALGEBRA

Sistemas de ecuaciones lineales (mxn).
Eliminaciones de Gauss Jordan.
Rango de un sistema lineal. Sistemas determinados, indeterminados, e incompatibles.
Matrices y sistemas lineales. Matriz de coeficientes asociada a un sistema lineal. Matriz ampliada.
Sistemas homogéneos. Utilización del método de Gauss para caracterizar los sistemas homogéneos indeterminados y los de solución única.
Introducción a la programación lineal.
I) Problemas en dos variables:
. Conjunto de restricciones y sistemas de inecuaciones

lineales. Interpretación algebraica y gráfica.
. Función objetivo. Recta de utilidades constantes.
. Resolución por métodos gráfico y del punto esquina para problemas con solución única (se sugiere que en el caso de disponer de computadora se recurra también a algún utilitario adecuado, después de la conceptualización)
. Análisis de condiciones para que un problema tenga infinitas soluciones, sea no acotado, o no factible.

II) Problemas en más de dos variables:
Planteo del problema

Ecuaciones racionales, irracionales, exponenciales y logarítmicas asociadas a las funciones estudiadas
Inecuaciones racionales, irracionales y exponenciales asociadas a las funciones estudiadas

Contenidos procedimentales

Representación de problemas a través de sistemas lineales
Interrelación entre enunciados de problemas y sistemas de ecuaciones
Análisis de las condiciones de un problema que hacen que tenga infinitas soluciones, solución única o ninguna solución
Formulación de preguntas a partir de un enunciado
Formulación de problemas que responden a un sistema dado
Comparación entre distintos problemas que responden al mismo sistema de ecuaciones
Búsqueda de parámetros para que el sistema cumpla determinadas condiciones
Selección de variables relevantes para la resolución de problemas de programación lineal en los que es necesario considerar más de tres variables
Dadas las restricciones de un problema de programación lineal en dos variables, búsqueda de una función objetivo que haga que el problemas tenga infinitas soluciones
Formulación de problemas de programación lineal que respondan a un conjunto de restricciones dadas y a una función objetivo dada

3) GEOMETRIA

Contenidos conceptuales

Cónicas como lugar geométrico: su expresión referida a un sistema de coordenadas. Ecuación de la circunferencia, de la elipse, de la hipérbola y de la parábola.

Contenidos procedimentales

Determinación de la ecuación de una curva a partir de su caracterización en forma verbal
Construcción de las cónicas por puntos
Descripción y justificación de las construcciones de las cónicas

4) PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

Contenidos conceptuales

Distribución binomial
Distribución de frecuencias

Parámetros estadísticos: media y desviación típica. Uso de calculadora para el cálculo de parámetros.
Distribución de probabilidad de variables discretas y continuas. Histograma de áreas
Distribución normal
Distribuciones bidimensionales: idea de correlació

Contenidos procedimentales

Aplicación de la distribución binomial como modelo para la resolución de problemas

Cálculo de la media y la desviación típica en diferentes problemas

Identificación del gráfico correspondiente a una distribució normal, entre varios gráficos dados, a partir de media y su desviación típica.

Solamente para los bachilleratos con orientación en Ciencias, se introduce un nuevo eje:

5) LA DEMOSTRACION EN MATEMATICA

En tanto esta unidad aborda contenidos de tipo metodológico, no haremos la distinción entre contenidos conceptuales y procedimentales. Se trabajarán los siguientes aspectos

- Enunciados verdaderos y falsos
- Ejemplos y contraejemplos
- Deducción
- Demostraciones en conjuntos finitos e infinitos
- Dibujos y demostraciones en geometría

Como ya se comentara en un informe de avance, la demostración forma parte del modo de producir y comunicar el conocimiento matemático. Es por eso que los alumnos a través de la enseñanza de la matemática deberían apropiarse de algunas de las formas que se utilizan en esta disciplina para validar el producto de su actividad. En tanto contenido metodológico, el tema de la demostración atraviesa todos los contenidos que se abordan en la escuela y sería deseable que los estudiantes evolucionaran en cuanto a la manera de justificar sus trabajos, de elaborar argumentos para sostener un debate, de aceptar o rechazar propiedades. Para que este objetivo pueda cumplirse es necesario considerar, en cierto momento, el tema de la demostración como objeto de estudio y reflexión por parte de los estudiantes, estudio que debería llevar a explicitar cuáles son las reglas que caracterizan la argumentación en matemática y la distinguen de otro tipo de argumentaciones.

Es indudable que la práctica alrededor de un modo particular de argumentar y validar la actividad se convierte para el alumno en un instrumento intelectual de alto valor formativo que trasciende completamete la disciplina matemática. Es por eso que hemos pensado en tomar como objeto de enseñanza -para aquellos alumnos que tienen 5 o 6 horas de matemática semanales- el tema de la demostración.

Se piensa que el tratamiento de estos contenidos debe realizarse sobre temas específicos de matemática. Los intentos de introducir elementos de lógica desvinculados de los contenidos matemáticos han dado sobradas muestras de fracaso porque los alumnos no establecen espontáneamente la relación entre esos contenidos lógicos y las reglas de validación en matemática. Por otra parte es necesario pensar en situaciones que generen algún interés en la demostración por eso pensamos que la posibilidad de trabajar sobre las cuestiones anteriores está estrechamente ligada a la posibilidad de generar la confrontación y el debate en el aula. En relación al contenido matemático elegido para reflexionar acerca de la demostración, nos ha parecido especialmente propicio el tomar algunas cuestiones de divisibilidad y teoría de números. Al respecto pueden considerarse algunos temas que aparecen en el libro "Aritmética Elemental en la Formación Matemática" de Enzo Gentile, Edición de la Olimpiada Matemática Argentina, 1991.

ANEXO II

Documento dirigido a los docentes de primer año de la escuela media. Este documento recupera las ideas trabajadas con el grupo de multiplicadores a propósito del eje Relaciones y Funciones.

Representaciones gráficas

Resaltábamos en la fundamentación del proyecto curricular la importancia de introducir el aspecto modelizador de la matemática en la enseñanza media. Esto significa -recordémoslo- realizar una propuesta didáctica a través de la cual el estudiante descubra la matemática como una herramienta útil para interpretar y analizar fenómenos o situaciones de diversa naturaleza. El trabajo de modelización exige seleccionar las variables que interesará estudiar particularmente, utilizar el lenguaje de la matemática para establecer relaciones entre las mismas, operar con las relaciones establecidas y reinsertar los resultados obtenidos en el problema original.

Elaborar el concepto de modelo implica comprender que dicho modelo está basado en una simplificación de la realidad, que la descripción que se logra es solo aproximada, que gracias a la sustitución del fenómeno real por el modelo es posible utilizar el aparato matemático -que no depende de la naturaleza concreta del fenómeno- para describir y predecir un conjunto de hechos que se produce bajo ciertas condiciones, que una mala elección del modelo da resultados que no responden a la realidad. En fin, es esencial que los estudiantes descubran el carácter anticipador de la matemática en el sentido de que permite predecir el resultado de experiencias no realizadas.

Una de las problemáticas vinculadas al proceso de modelización es la selección de formas apropiadas para representar el fenómeno que se intenta estudiar. Para que ello sea posible -estamos hablando de alumnos de la escuela media, no de matemáticos- es necesario proponer situaciones a través de las cuales los estudiantes puedan interpretar y producir distintas formas de representación. Es necesario además tener en cuenta que cada manera de representar un fenómeno pone de relieve algunos aspectos y oculta otros, lo cual exige a quien está ejerciendo una actividad modelizadora, tener capacidad para seleccionar en cada oportunidad aquellas representaciones mejor adaptadas al problema que se está resolviendo.

Las actividades que siguen apuntan a discutir con los alumnos distintos aspectos de la representación gráfica. Hemos seleccionado algunos problemas en los que el trabajo se centra en la interpretación de gráficos y otros en los que el desafío mayor consiste en producirlos. Hemos procurado además, que las actividades faciliten la interacción entre distintas formas de representación y en algunos casos que exijan que el estudiante elija cuál es la representación más adecuada.

ACTIVIDAD 1

Trabajar con un gráfico hecho sobre un sistema de coordenadas cartesianas, extraído del diario.

a) Proponer que los alumnos describan en forma escrita y por grupos las informaciones que ellos piensan que provee el gráfico.

Para facilitar la puesta en común y favorecer el intercambio de las producciones, cada grupo redacta sus conclusiones en papel afiche que se pegará en el pizarrón. Se organiza el debate para comparar los distintos informes, corregir posibles errores o ambigüedades, y redactar un único informe a partir de las producciones globales.

b) La clase se organiza en una cantidad par de grupos. Cada grupo formula una pregunta que pueda responderse a partir de la lectura del gráfico y la responde. Luego envía solamente la respuesta a otro grupo, el cual a su vez hará lo mismo con este primer equipo. Es decir cada dos grupos se intercambian las respuestas producidas. A partir de la respuesta obtenida, el grupo receptor debe tratar de reconstruir la pregunta que formuló el grupo que la envió.Luego se comparan las preguntas del emisor y del receptor. En caso de haber desacuerdos, se analiza si ambos equipos tienen razón -esto significaría que hay preguntas diferentes que tienen la misma respuesta- o si hubo algún error por parte del grupo emisor o del grupo receptor.

A partir de las preguntas formuladas en los distintos grupos, se analiza en conjunto la estructura de las preguntas que surgieron tratando de encontrar una clasificación de las mismas.Luego se solicita que cada grupo proponga una pregunta cuya estructura sea diferente de las que ya aparecieron.

Esta última parte de la actividad -buscar más preguntas diferentes- apunta a enriquecer el tipo de lectura que en general hacen los alumnos. Qué queremos decir? Es usual que los estudiantes pregunten por los valores correspondientes a elementos representados en el eje de las abscisas. Se busca que, a partir de esta actividad, los alumnos pregunten por

- correspondientes de intervalos (de la forma, "cuales son los y cuyos x están entre a y b?" o "cuáles son los x cuyos y están entre a y b?")
- correspondientes de elementos representados en el eje de las ordenadas (de la forma "cuál es el x cuya y es tal?)

La actividad propuesta tiene por objetivo que los alumnos realicen una aproximación global al tema de la lectura de gráficos. La primera parte del trabajo propicia que los estudiantes desplieguen en el aula sus concepciones acerca de la interpretación de gráficos, cuestión que no siempre se facilita si, desde un comienzo, la tarea es responder preguntas puntuales planteadas por el profesor a propósito de un gráfico.

En la medida en que se trate de una problemática nueva, el momento de puesta en común puede resultar de mucho interés para movilizar las ideas de los alumnos y provocar un debate que los ayude avanzar en su comprensión; es por eso que proponemos una organización grupal dado que -además de los beneficios de intercambio que son inherentes al trabajo en grupo- al haber menos cantidad de producciones, la puesta en común resulta más ágil. La modalidad propuesta en la parte b) -situación de emisor receptor- tiene por objetivo facilitar el intercambio y el control entre los grupos antes de que el docente "autorice" la validez de tal o cual pregunta. Actividades de este tipo apuntan a un objetivo muy difícil de lograr: que el problema de la validación de la actividad se proponga como una responsabilidad de los alumnos en lugar de ubicarlo exclusivamente a cargo del docente.

ACTIVIDAD 2

La propuesta es comparar dos gráficos que tienen el mismo dominio numérico y la misma "forma" pero que describen fenómenos de naturaleza completamente diferentes. (Ver gráficos en la página siguiente.

Consigna para el alumno

Observá los siguientes gráficos. Opinás que el gráfico 1 indica una evolución favorable. Por qué? Opinás que el gráfico 2 indica una evolución favorable? Por qué? Establecé semejanzas y diferencias entre los dos gráficos.

Comentarios para el docente

La elaboración de conceptos supone por parte de los alumnos la utilización de los mismos en distintos contextos. Es en ese sentido que consideramos importante establecer comparaciones entre fenómenos diferentes cuya representación matemática es idéntica. Proponemos como cierre de la actividad la siguiente consigna (para realizar por grupos):

Consigna para el alumno

Considerá nuevamente la misma forma de gráfica borrando el significado de los números representados en los ejes. Inventá una situación que pueda ser descripta por la gráfica. Qué significado tienen los números en la situación que inventaste?

Comentarios para el docente

A continuación se realiza una puesta en común de las producciones de cada grupo, sometiendo a la consideración del conjunto las producciones de cada equipo.

GRAFICOS

Evolución de la temperatura de un enfermo internado en el hospital, a quien se le tomaba la temperatura todos los dias a la misma hora.

Evolución de la produccion de tomates de una chacra

Una aclaración necesaria: "en realidad" ninguno de los dos gráficos anteriores tiene "derecho" a ser continuo. En el primer caso, porque si bien la temperatura es una variable continua, no hay un registro continuo -la misma se está tomando una vez al día-; en la chacra, porque la variación de la producción de tomates es discreta. En ambos situaciones, se está suponiendo variación uniforme entre los puntos resgistrados. El docente evaluará hasta donde llegan sus aclaraciones con los alumnos en relación a esta cuestión. Estamos ubicados en una posición que obliga a aceptar cierta provisoriedad si se pretende abordar la complejidad relativa a las representaciones gráficas. Si las características del curso lo hacen posible, se podrá trabajar alrededor de la siguiente cuestión

- con los datos experimentales que se tienen, los gráficos deberían ser gráficos de puntos, pero en ese caso, sería más difícil visualizar la evolución de las situaciones que se estudian. Justamente es la suposición de variación uniforme entre dos registros consecutivos, lo que da una idea de esa evolución. (No olvidemos que la elección del modelo matemático que se usa para describir un fenómeno queda a cargo de quien está haciendo uso del modelo y no es inherente al fenómeno).

ACTIVIDAD 3

Consigna para el alumno:

a) Los siguientes gráficos muestran la evolución del capital de dos empresas durante 5 años, desde el momento de su fundación.

GRAFICOS

- Cuál fue el capital inicial, para cada empresa?
- Cuál de las dos empresas creció más el primer año?
- Cómo evolucionaron, para cada empresa, las ganancias a partir del segundo año?
- Establecé una relación entre la "inclinación" de cada segmento de la línea de cada gráfico y el rendimiento de cada empresa.

b) Observá los siguientes gráficos. Podés hacer comentarios acerca del rendimiento de combustible de cada marca?

TRES GRAFICOS 1) LITROS EN FUNCION DE KILOMETROS
2) LA MISMA INCLINACION SIN UNIDADES
3) MAS INCLINADO SIN INFORMACION NUMERICA
4) MAS SUAVE SIN UNIDADES NI ESCALA

Comentarios para el docente

El objetivo de la actividad es que los alumnos seleccionen los elementos necesarios para la determinación del gráfico cartesiano: escala y elección de unidades. Al final del trabajo el estudiante debería poder explicitar que en la parte a) la relación entre "inclinación" de cada segmento y evolución de las empresas es posible porque se trabaja sobre la misma escala y con la misma elección de unidades, mientras que en la parte b) la ausencia de todos o algunos de esos elementos bloquea la posibilidad de comparación.

El trabajo para la parte b) podría organizarse de la siguiente manera: una vez que los alumnos han realizado sus comentarios con respecto al rendimiento de cada marca, el docente entrega los siguientes gráficos y pide a los alumnos que vuelvan a realizar la comparación

GRAFICOS CON TODA LA INFORMACION

ACTIVIDAD 4
Planteo para el alumno

Sherlock Holmes está estudiando el caso del señor Rodriguez sobre quien recae la sospecha de haber participado en el robo de la calle Montes. Lo viene observando desde hace varios días. El señor Rodriguez hace una vida bastante aburrida: va todos los días a su oficina, que queda a 10 km de su casa, permanece un tiempo allí y luego regresa. Por alguna circuntancia puede ser que se detenga en el camino de ida o de vuelta, pero esto, rara vez ocurre. El señor Rodriguez puede ir a la oficina caminando, en colectivo o combinando ambas posibilides.

Scherlock ha representado sus observaciones en un sistema de ejes perpendiculares, indicando las horas del día en el eje horizontal y la distancia a la casa del señor Rodriguez en el eje vertical. Acá te mostramos los gráficos correspondientes a los dos primeros días

GRAFICO

Podés reconstruir el recorrido correspondiente a estos gráficos? Aclará a qué hora salió Rodriguez de su casa, a qué hora llegó a la oficina, si lo hizo caminando o en colectivo, a qué hora regresó a su casa, etc, etc...

Mirá ahora los gráficos del tercer y cuarto días, qué paso?

GRAFICO

Algo anduvo mal en el gráfico del quinto día. Podés explicarlo?

GRAFICO

Comentarios para el docente

Se busca que a través de este trabajo los alumnos puedan interpretar un gráfico del tipo espacio-tiempo. Uno de los mayores obstáculos que presenta este tipo de representación es que los estudiantes suelen confundir las líneas del gráfico con la trayectoria realizada. El análisis exhaustivo de cada "trozo" de la representación podría favorecer que los alumnos empiecen a discriminar esta cuestión. Se podrían proponer algunas preguntas cuya respuesta exige la inferencia de información que no está explicitada. Por ejemplo,

- Cómo reconocer si el señor Rodriguez fue a la oficina caminando o en colectivo?
- Cómo reconocemos el momento que estuvo detenido?
- Cómo se expresa en el gráfico que está retrocediendo?

Para contestar, habrá que establecer una relación entre la "inclinación" de cada segmento y la velocidad de marcha.

En relación con el gráfico del quinto día se propone que los alumnos expliciten de distintas maneras el error de la representación que se muestra

"no puede retroceder en el tiempo"
"no puede estar al mismo tiempo en dos lugares distintos"
"un segmento con esa inclinación es un segmento de 'ida' y no de 'vuelta'"

ACTIVIDAD 5

(Esta actividad ha sido extraida del libro Matemáticas 1 de Miguel de Guzman, José Colera y Adela Salvador, Editorial Anaya. Se han agregado algunas preguntas a las propuestas en el texto mencionado.)

Planteo para el alumno

Hacemos una excursión en bicicleta a un bosque que está a 44 km de nuestro pueblo, para llegar al cual hay que seguir un itinerario con subidas y bajadas. Estamos allí un rato y volvemos.

Mirando las gráficas contesta las siguientes preguntas

- Qué significa cada cuadrito en el eje horizontal de la gráfica espacio-tiempo? Y en el eje vertical?

- A qué hora salimos?

- Cuántos kilómetros hay, aproximadamente, desde el comienzo de la primera cuesta hasta la cima? Cuánto tiempo tardamos en subirla?

- Cuántos kilómetros hay de bajada? Qué tiempo se tarda?

- Qué distancia hay desde la hondonada hasta el bosque? Cuánto tardamos en recorrerla?

- Cuánto tiempo estamos descansando en el bosque?
- Describe el viaje de vuelta.

- Cuánto hemos tardado en ir del pueblo al bosque? Y del bosque al pueblo? A qué crees que puede deberse la diferencia?

- Observá en ambas gráficas el tramo cima-hondonada. Por qué si estamos bajando el segmento correspondiente en la segunda gráfica sube?

Comentarios para el docente

La actividad propone la interacción entre dos formas de representación: el paisaje y el gráfico cartesiano. Pensamos que esta interacción contribuirá a avanzar en la discriminación entre trayectoria y gráfica espacio-tiempo. El trabajo puede ser útil para comentar que las dos representaciones muestran aspectos distintos del fenómeno "paseo en bicicleta" y que ninguna lo muestra en su totalidad. En otras palabras, la representación supone poner de relieve aquello que por algún motivo se desea estudiar. En este sentido se puede organizar una discusión con todo el grupo de clase alrededor de las siguientes preguntas

- Qué podemos saber observando solamente el gráfico 1? Y observando solamente el gráfico 2? Qué información extraemos observando los dos gráficos y "cruzando" información de uno a otro?

ACTIVIDAD 6

Consigna para el alumno

Las dos gráficas siguientes representan dos maneras distintas de cobrar los impuestos según los ingresos que tenga una persona. Explicá el criterio seguido en cada caso. Cuál te parece más razonable? Por qué? Escribí tus conclusiones.

GRAFICAS: UNA ESCALONADA LA OTRA CONTINUA PERO COINCIDIENDO EN LOS PUNTOS DE 'SALTO'.

Comentarios para el docente

Será de interés discutir con los alumnos las siguientes cuestiones:

- No parece muy razonable el criterio representado por la gráfica I en tanto que pequeñas variaciones en los ingresos provocan grandes variaciones en el impuesto a abonar.

- Para algunos valores, a igual ingreso corresponde en ambos criterios, igual impuesto. Qué sucede a partir de uno de esos puntos en un caso y en otro?

ACTIVIDAD 7

Dictado de figuras

La clase se organiza en una cantidad par de grupos para trabajar en una situación de emisor receptor (ver actividad 1).
El docente entrega a cada equipo una hoja lisa en la que hay dibujado un polígono (a cada grupo se le entrega un dibujo diferente). Cada equipo debe producir un mensaje de manera tal que el grupo receptor pueda reproducir la hoja "como si se le hubiera sacado una fotocopia". Es decir, al superponer la hoja original y la reproducida por el equipo receptor, los dibujos deben coincidir.

Comentarios para el docente

A través de esta actividad se busca que los alumnos puedan inventar algún sistema de ubicación de puntos en el plano.
No necesariamente reinventarán los ejes cartesianos. Está claro, sin embargo que, cualquiera sea el recurso utilizado, deberán considerar para cada punto dos datos. Queremos llamar la atención sobre algunas cuestiones

- proponemos trabajar en hoja lisa ya que el cuadriculado o los renglones harían la tarea muy fácil en este nivel, desvirtuando el sentido de la actividad que es poner en funcionamiento un sistema de referencia

- no consideramos que sea interesante trabajar con figuras muy complejas, lo cual haría perder de vista el objetivo de la actividad que es la búsqueda de convenciones para ubicar puntos en el plano; justamente optamos por una figura poligonal para disminuir la complejidad de la misma. A propósito de esta cuestión se podrá discutir con los estudiantes que es suficiente con ubicar los vértices para determinar la figura

- puede suceder que los alumnos utilicen distintos recursos para distintos puntos. Un procedimiento que usualmente ponen en juego es considerar uno de los vértices de la hoja como "origen" de un sistema cartesiano para "dictar" algunos puntos y luego cambiar ese origen a otro vértice de la hoja. Este tipo de producciones deberían dar lugar a una discusión acerca de la conveniencia de establecer convenciones para facilitar la comunicación. En este sentido, el par ordenado puede aparecer como una convención económica.

Se propone a continuación trabajar con el plano de una ciudad, ubicando puntos, líneas y regiones. Transformar luego las calles en rectas y proponer actividades en las que los alumnos tengan que

- ubicar puntos dados a través de las coordenadas cartesianas
- dar las coordenadas de puntos marcados
- dar las condiciones de rectas horizontales y verticales
- dar las condiciones de segmentos horizontales y verticales

Las actividades que se proponen a continuación introducen el trabajo con fórmulas. Se planteará entonces la interacción entre cuatro formas de representar una relación: verbal, por tablas, gráfica y por fórmulas.

ACTIVIDAD 8

Planteo para el alumno

Cada semana Esteban cobra por su trabajo como vendedor en un negocio de acrílicos, la quinta parte del importe de sus ventas.

a) Completá la tabla para que figuren, el importe de las ventas semanales de Esteban y el dinero que cobró en cada caso.

Importe de las ventas semanales (en $)	Dinero que cobró (en $)
100	
120	
	100
	120
700	

Comentario para el docente

Solicitamos que los alumnos completen la tabla para poner a prueba la comprensión del enunciado dado. Pedimos la imagen y la preimagen de valores iguales para diferenciar el papel que juegan esos números en cada caso. Notemos que la búsqueda de preimágenes introduce la problemática de resolución de ecuaciones de primer grado. .

Consigna para el alumno

b) Si el importe de la venta semanal es una cantidad x, qué cuenta debés hacer con x para obtener el dinero que deberá cobrar Esteban? Escribí una fórmula que permita expresar la relación entre los importes de las ventas y el dinero a percibir por Esteban.

Comentario para el docente

Para "armar" la fórmula sería interesante que los alumnos encontraran qué es lo que hay en común en los distintos cálculos que se hicieron para obtener el dinero que cobra Esteban en función del importe de las ventas:

100---> 100/5   120---> 120/5   700---> 700/5

Es usual que los alumnos escriban "fórmulas" como las siguientes

i/5   fórmula = i/5   i = i/5

en las que se priorizan las operaciones a realizar con la variable independiente sin que se explicite cuál es el resultado de la operación o no se distinga entre variable dependiente e independiente. Es entonces el momento de someter la notación a discusión del grupo. Otro aspecto a tener en cuenta se vincula al nombre utilizado para las variables. Es importante considerar que los alumnos comprenden mejor el sentido de la fórmula cuando los nombres evocan de alguna manera el significado de la variable en el contexto particular en el que se está trabajando.

La fórmula

Dinero que cobra Esteban = Importe de las ventas/5

puede pensarse como la manera de guardar la traza de las operaciones realizadas para obtener el dinero que cobrará Esteban. En otras palabras, cuando se efectiviza el cálculo para un valor cualquiera no se conserva el registro de las operaciones realizadas (un mismo número puede provenir de operaciones muy diversas), registro que sí está dado por la fórmula. Por ese motivo decimos que la fórmula algebraica funciona como una "memoria" de las operaciones realizadas.

Consigna para el alumno

c) Graficá en un sistema de ejes cartesianos la relación entre lo que vende y lo que gana Esteban.

Comentarios para el docente

Se trata del primer trabajo en el que el estudiante deberá producir él mismo una representación cartesiana. Pensamos que es imprescindible que los alumnos realicen un primer intento, por sus propios medios. Este será el momento en el que aflorarán las dudas que normalmente tienen en relación a la producción de gráficos:

- Qué valores tengo que representar?
- Si en lugar de elegir estos valores represento otros, el gráfico cambia o es el mismo?
- Qué escala hay que usar?
- La escala en el eje x es la misma que la escala en el eje y?

Los alumnos no tienen, en general, la suficiente claridad como para expresar sus dudas en los términos enunciados en las preguntas anteriores; sin embargo estas dudas pueden inferirse a través de actitudes inseguras, de numersas correcciones, de consultas reiteradas. No se trata de anticiparse a las dudas anunciando las respuestas antes de que aparezcan las preguntas; se trata más bien de favorecer el intercambio entre los alumnos, de alentar que recurran a las representaciones con las que ya han trabajado para analizar cómo han sido confeccionadas, de organizar discusiones con el conjunto de la clase alrededor de los interrogantes que se plantean.

Una vez logrado un acuerdo respecto de la representación cartesiana de la relación, se puede trabajar numérica y gráficamente sobre algunas preguntas:

Preguntas para el alumno

- Esteban cobró más de $ 127,5 y menos de $ 432. Qué se puede afirmar del importe de las ventas?
- Esteban vendió más de $ 1250 y menos de $ 2000. Qué se puede afirmar de su ganancia?

Comentario para el docente

Cuando hablamos de trabajar las preguntas numérica y gráficamente nos referimos a obtener la respuesta en uno de los dominios y usar el otro como elemento de control. Incluso es interesante formular la pregunta incluyendo la siguiente

Consigna para el alumno

"Explicá cómo podés saber si tus respuestas son correctas".

Comentario para el docente

Ya hablamos del tema de la validación de la actividad del alumno por parte del alumno mismo. Es una cuestión difícil de conseguir y es, por lo tanto, imprescindible tener en cuenta, para cada situación, cuáles son las posibles formas de validación que la actividad ofrece.

Planteo para el alumno

Matías también es vendedor en el mismo negocio que Esteban. El acuerdo que él hizo con el dueño es el siguiente: cada semana cobra por su trabajo una parte fija de $ 150 más la décima parte de importe de sus ventas.

d) Completá la tabla

Importe de las ventas semanales (en $)	Dinero que cobró (en $)
200	
400	
	200
	400
700	

e) Matías cobró más de $ 148,5 y menos de $ 400. Qué podés afirmar del importe de sus ventas? Explicá cómo podés saber si tu respuesta es correcta.

f) El dueño del negocio computarizó el sistema. Qué datos debe ingresar la persona que opera la computadora para liquidar los sueldos de Esteban y de Matías? Qué cuenta hace la computadora en cada caso?

g) Compará el arreglo que hizo Matías con el que hizo Esteban. Te parece que uno es más ventajoso que el otro? Cuál? Redactá un informe comparando las dos situaciones.

Comentarios para el docente

Las preguntas acerca de la computarización del sistema apuntan a poner en funcionamiento la fórmula en un contexto algo distinto que en el item b), cuestión que deberá ser señalada en la puesta en común. Será también este el momento de explicitar cuáles son las variables del problema: en ambos casos el dato que ingresa se refiere a los valores de las ventas pero el resultado depende de cada arreglo.

En relación con la comparación entre los dos acuerdos deseamos hacer notar que no resulta suficiente observar los datos de las tablas ya que, según los mismos, el arreglo de Matías es más ventajoso que el de Esteban, lo cual se verifica solamente para cierto intervalo al que justamente pertenecen los datos que se han colocado. Para responder al problema hay necesidad de "extender" de alguna manera los valores que se observan. Hay varios caminos posibles pero pensamos que en este nivel, la representación cartesiana es la herramienta mejor adaptada a la comparación y es justamente, a la movilización de dicha herramienta que apunta la actividad.

ACTIVIDAD 9

Planteo para el alumno

Marcelo y David también trabajan ambos en un negocio. Los acuerdos de sueldo que cada uno realizó se representan a través de los siguientes gráficos

GRAFICOS

Marcelo y David quieren que sus convenios sean explicitados a través de un contrato. Redactálos.

Comentarios para el docente

Esta actividad es de alguna manera, inversa a la anterior ya que el acuerdo viene representado gráficamente y se solicita que se exprese en forma verbal. Sugerimos que se pongan en común las distintas producciones para corregir posibles ambiguedades. Como cierre de la actividad se puede proponer a los alumnos que formulen preguntas del estilos de las planteadas en la actividad anterior y que las respondan.

ACTIVIDAD 10

Plantear una situación similar a las anteriores pero en la que los acuerdos estén definidos a través de fórmulas.

ACTIVIDAD 11

Planteo para el alumno

No sabemos cómo se liquidan los sueldos de Mónica y de Cristina. Tenemos algunos datos que expresamos en las siguientes tablas

Mónica

Importe de las ventas semanales (en $)	400	600	1000	1200	1600
Dinero que cobra (en $)	250	250	250	250	250

Cristina

Importe de las ventas semanales (en $)	400	600	1000	1200	1600
Dinero que cobra (en $)	100	125	175	200	250

Podés decir, a partir del análisis de las tablas, cómo son los acuerdos de Mónica y de Cristina con el dueño del negocio?
Cuál de los dos arreglos es más conveniente? Por qué?

Comentarios para el docente

Esta actividad exige que los alumnos establezcan la relación entre las variables a partir del análisis de los datos en las tablas, tarea que resulta más compleja que las anteriores en la medida en que la ley no se explicita.

Como en la actividad 8, los valores de las tablas no muestran la inforamción completa: es necesario inferir que, a partir de $ 1600 es más ventajoso el acuerdo de Cristina.

A partir de esta actividad -y recuperando las anteriores- se puede realizar con los alumnos un análisis de aquello que mejor muestra cada forma de representación:

- la tabla de valores permite establecer las relaciones numéricas entre las variables. Así, en el caso de Cristina, se puede establecer, por ejemplo, que a un incremento de $400 en sus ventas, corresponde un incremento de $ 50 en sus ganancias; a doble venta, no corresponde doble ganancia, etc.;

- la representación cartesiana, permite hacer un análisis global y "extender" los datos dados a través de la prolongación de las rectas;

- la fórmula -lo hemos visto- guarda la "memoria" de las operaciones a realizar.

Todas estas formas de representación interactúan con la formulación verbal de la situación.

Luego de la discusión sugerimos proponer a los alumnos una situación similar formulada verbalmente y solicitar la comparación entre las relaciones dadas. Esta actividad deja a cargo del alumno la decisión de cuáles son las tareas necesarias para cumplir con la consigna.

Nota: los gráficos no se incluyen en la presente versión ya que el material está por editarse y la edición está a cargo de la provincia.

ANEXO III

Documento elaborado para la capacitación de los docentes de la escuela media en el mes de julio

APORTES PARA EL ANALISIS DIDACTICO

Patricia Sadovsky

Presentación

El objetivo del presente material es aportar algunos elementos para el análisis didáctico de problemas destinados a favorecer la formación de conceptos matemáticos.

La propuesta se sitúa en una concepción de aprendizaje que -más allá de las nociones de motivación, aplicación o evaluación- considera los problemas como el verdadero motor del aprendizaje. En este sentido para cada uno de los conceptos que se intentan enseñar, es necesario concebir un conjunto de problemas ya que es a través de ellos que el alumno irá elaborando el sentido de los conceptos que se pretende que aprenda. Concebir un conjunto de problemas va mucho más allá de la formulación de sus enunciados. La perspectiva que se plantea acá exige analizar, a propósito de cada secuencia, cuáles son los significados que se ponen en juego, con qué herramientas cuenta el alumno para resolverlos, qué conceptos deberá el estudiante movilizar, cuáles son los procedimientos que pondrá en juego, qué errores se pueden anticipar, como se provocará el rechazo de esas concepciones erróneas, que discusiones se pueden promover, que aspectos pondrá en común el docente, de qué manera reutilizará el alumno lo aprendido...

Pretendemos que a través de esta instancia de capacitación los docentes puedan aproximarse a estas herramientas de análisis, entendidas como herramientas orientadoras de la acción didáctica. En muchas de las actividades propuestas, solicitamos a los docentes que elaboren un informe escrito de los análisis que van realizando, pensamos que esta es una buena manera de ir "atrapando" las ideas que se gestan y se potencian en un grupo cuando el motor que lo empuja es el anhelo de mejorar la calidad de su trabajo.

PRIMERA JORNADA

Actividad 1 (Tiempo estimado: 4 horas)

- Análisis y discusión alrededor de un conjunto de problemas
- Redacción de un informe escrito, producto de la discusión

****

CONSIGNA PARA LOS DOCENTES

A continuación les presentamos una lista de problemas y algunas resoluciones hechas por alumnos de distintos años de la escuela media.

a) Analicen cuál puede ser la intención didáctica al proponer cada uno de los problemas.

b) Traten de interpretar los procedimientos utilizados por los alumnos teniendo en cuenta

- cuáles son las concepciones de los estudiantes que los llevan a poner en juego los procedimientos expuestos

- a través de qué procesos piensan ustedes que los alumnos van elaborando las concepciones que indentificaron en el punto anterior

- qué situaciones didácticas se pueden prever para hacer evolucionar las concepciones de los alumnos que ustedes han explicitado

Dos aclaraciones se hacen necesarias:

- los problemas no están propuestos como una secuencia de enseñanza de algún concepto (los mismos deben ser analizados de manera independiente uno de otro);

- los problemas no pretenden ser "buenos modelos a imitar" ni "malos problemas que no hay que plantear".

Los hemos elegido porque pensamos que tanto el análisis de los mismos como el de los procedimientos propuestos por los estudiantes puede promover reflexiones útiles para la enseñanza.

Una cuestión acerca de la organización del trabajo

Ustedes deberán redactar un informe escrito del análisis que realicen. Les sugerimos que vayan registrando los puntos más importantes de la discusión, de manera tal que el informe sea un producto del trabajo que han realizado.

****

Problema 1

Juan y Mario han repartido la carga del equipaje de manera tal que Juan lleva 5 kilos más que Mario. Si Juan le diera a Mario 4 kilos de su carga, le quedaría el equivalente a 2/3 de la carga de Mario. Cuáles son las cargas que soporta cada uno actualmente?

Solución propuesta por un alumno:

x ---> carga de Juan
y ---> carga de Mario

$$x = y + 5$$
$$x - 4 = 2/3\ y$$

$$y + 5 - 4 = 2/3\ y$$
$$y - 2/3\ y = 4 - 5$$
$$1/3\ y = -1 \qquad\qquad y = -3\ ,\quad x = 2$$

Problema 2

a) Resolver la inecuación $x - 1 < 7$

b) Resolver la inecuación $x - 1 > 7$

Solución propuesta por un alumno

a) $x - 1 < 7 \;--->\; -7 < x - 1 < 7$
$$-6 < x < 8$$

-6 8

b) $x - 1 > 7 \;--->\; x - 1 > 7 \quad o \quad x - 1 < -7$

$$x > 8 \quad o \quad x < -6$$

-6 8

Problema 3

Hallar los ceros de la función $f: R ---> R \ /\ f(x) = (x + 4)(x - 2)$

Solución propuesta por un alumno

$$(x + 4)(x - 2) = x^2 - 2x + 4x - 8 = x^2 + 2x - 8$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0 -----> x = -2 \qquad 4 + 32$$

$$x = \frac{-2 \quad 6}{2} \qquad\qquad x = 2$$

$$x = -4$$

Problema 4

Es cierto que para cualquier valor de x se cumple que:

$$\frac{3}{x} > \frac{3}{x+2}$$

Si pensás que sí, explicá por qué. Si pensás que no, determiná para qué valores es cierto.

Solución propuesta por un alumno

Es cierto por x es menor que x + 2 y si divido 3 por un número menor el resultado es mayor.

Problema 5

Encontrá un número que sumado a 2/5 dé como resultado 1. Cuántos números podrías encontrar ?

Solución propuesta por un alumno

2/5 + 3/5 = 1

Hay infinitas soluciones:
3/5, 6/10 , 9/15, etc.

Problema 6

Las siguiente tabla muestra la relación entre el consumo de electricidad y el importe que se abona a una cierta empresa.

Consumo (en kw)	100	130	170	200	250	320
Importe (en $)	17	18,5	20,5	22	24,5	28

Cuánto se abona por un consumo de 230 kwh ? Qué suposiciones estás haciendo para responder la pregunta anterior?

(Para este problema se presentan varias soluciones propuestas por distintos alumnos, traten de establecer semejanzas y diferencias entre cada una de ellas)

Solución 1

250 -------- 24,5
230 -------- x

$$\frac{230 \times 24,5}{250} \quad 22,54 \text{ kwh}$$

Solución 2

$$100 \text{ kw} \text{ ------- } 17 \$$$
$$230 \text{ kw} \text{ ------- } x$$

$$x = 39,1$$

Solución 3

$$200 \text{ kw} \text{---------} 22 \qquad \frac{230 \times 22}{200} \quad 25.3$$
$$230 \text{ kw} \text{---------} x$$

Este alumno tacha el resultado (incompatible ya que da para 230 kwh un importe mayor que el que se indica en la tabla para 250 kwh) y dice:

"Me da 23,5 porque cada 30 kw se sube 1,5 y si 200 es igual a 22, 230 kw es igual a 23,5"

Solución 4

$$200 \text{ ------- } 22$$
$$230 \text{ ------- } x$$

Rta 25,3 ($) con un consumo de 230 kw/h. Mayor consumo menor importe.

Solución 5

$$200 \text{ ------- } 22 \qquad\qquad 250 \text{ ------- } 24,5$$
$$230 \text{ ------- } y = 25,3 \qquad\qquad 230 \text{ ------- } x \qquad x = 22,1$$

$$(25,3 + 22,1) : 2 = 23.7$$

Luego el alumno escribe: "Regla de 3 simple. Resultados se suman y se dividen por 2 (promedio) y da aproximadamente 23,7.

Solución 6

$$17 = k \cdot 100 + b \qquad\qquad 22 = k\ 200 + b$$
$$17 - 100\ k = 22 - 200\ k$$
$$\text{.............................}$$
$$100\ k = 5$$
$$k = 5/100 = 1/20$$
$$b = 12$$

$$y = 1/20\ x + 12$$

$$y = 1/20 \cdot 230 + 12 = 242,05 \$$$

Problema 7

Encontrar, entre todos los rectángulos de perímetro 12, el que tenga mayor área.

Solución de un alumno

Base	1	2	3	4	5
Altura	5	4	3	2	1

El de mayor área es el cuadrado de lado 3.

Problema 8

Determinar los valores de x para los cuales $f(x) > g(x)$, siendo

$f(x) = x^2 - 3x + 3$ $\qquad$ $g(x) = x$

Solución propuesta por un alumno

$$x^2 - 3x + 3 > x$$

$$x^2 - 3x + 3 = 0,$$

$$x = \frac{3 \quad 9 - 12}{2}$$

El problema no tiene solución

SEGUNDA JORNADA

Actividad 1 (Tiempo estimado: 1 hora)

Lectura de una parte del documento de orientación de la enseñanza de la matemática en la escuela media.

****

CONSIGNA PARA LOS DOCENTES

Leer el punto del documento orientador titulado
EL FRACASO DE LA ENSENANZA DE LA MATEMATICA: DE LAS EVIDENCIAS A LAS CAUSAS (paginas 13 a 18)

Les proponemos que lean y discutan teniendo en cuenta qué aspectos del material pueden enriquecer el análisis que ustedes han realizado a propósito de los problemas en la actividad 1.

****

Actividad 2 (Tiempo estimado: 3 horas)

La última parte de la lectura que acaban de realizar se refiere a la falta de recursos de control -por parte de los alumnos- de su propia producción. En relación a esta cuestión

****

CONSIGNA PARA LOS DOCENTES

- Qué recursos de control de la producción se podrían movilizar para cada uno de los problemas analizados ayer ?

- Las soluciones 1, 2, 3, 4 y 5 propuestas para el problema 4 de la actividad 1 de ayer, suponen la aplicación no pertinente de proporcionalidad directa. Sin embargo, pensamos que todas ellas son distintas desde el punto de vista del control y la consistencia del resultado. Realicen un análisis de las estrategias de control puestas en juego en cada uno de las soluciones expuestas.
Comparen las soluciones anteriores con la solución 6 desde el punto de vista
a) de la pertinencia del modelo matemático utilizado
b) del control de la producción

- Supongan que las 6 soluciones planteadas fueron producidas por alumnos de un curso de ustedes. Cómo organizarían una discusión en clase a propósito de las distintas propuestas?

Redacten un informe escrito que refleje todas las discusiones y producciones realizadas en los distintos items de esta actividad.

****

TERCERA JORNADA

Actividad 1 (Tiempo aproximado: 4 horas)

****

CONSIGNA PARA LOS DOCENTES

Lean y discutan la parte correspondiente a PROPUESTA DIDACTICA, del documento orientador (páginas 25 a 38)

****

CUARTA JORNADA

Actividad 1 (Tiempo estimado: 1 1/2 hora)

- Análisis didáctico a propósito de un contenido.
- Redacción de un informe a partir del análisis realizado

****

CONSIGNA PARA LOS DOCENTES

Consideren el contenido "ecuación de la recta". Les proponemos realizar un análisis didáctico del contenido en cuestión. Para eso tengan en cuenta los siguientes aspectos

1. Prerrequisitos conceptuales para el tratamiento del tema:

   - Determinen qué conceptos son necesarios para abordar la enseñanza de la ecuación de la recta

   - si dichos conceptos se encuentran en estado acabado en el alumno al encarar el aprendizaje

2. Significados que debería adquirir el alumno a propósito de este contenido

3. Procedimientos que deberían ponerse en juego para la elaboración del tema por parte del alumno

4. Formas de representación propicias para el tratamiento del tema

5. Dificultades que ustedes encuentran habitualmente en el momento del aprendizaje del tema

6. Dificultades que ustedes encuentran habitualmente en situaciones posteriores al aprendizaje, es decir, cuando se supone que el alumno debiera disponer del concepto como un recurso en contextos de aplicación o para nuevos aprendizajes.

7. Errores sistemáticos que cometen los alumnos en situaciones en que el concepto está involucrado

Redacten un informe escrito a partir del análisis realizado

****

Actividad 2 (Tiempo aproximado: 2 1/2 horas)

- Análisis de problemas
- Redacción de un informe

****

CONSIGNA PARA LOS DOCENTES

Les proponemos a continuación una serie de problemas pensados para **comenzar** la enseñanza de la ecuación de la recta. Para cada problema ustedes deberán

1. Resolver el problema

2. Analizarlo desde el punto de vista didáctico, incluyendo en su análisis los siguientes aspectos:

   - qué conceptos debe (o puede) actualizar el alumno para

resolverlo
- qué procedimientos debe (o puede) poner en juego
- qué errores cabe esperar por parte de los alumnos
- qué formas de representación se utilizan en el enunciado
- qué formas de representación cabe esperar por parte de sus alumnos
- qué actividades, discusiones y elaboraciones promoverían ustedes en clase a propósito del problema

3. Describir las razones didácticas de incluir el problema para el tratamiento del tema. Para ello, tengan en cuenta el análisis que realizaron en la actividad anterior.

Redacten un informe a partir del análisis realizado

****

Problema 1

(Los alumnos trabajan referidos a un sistema de coordenadas cartesianas. Se les entrega la siguiente representación en papel cuadriculado)

A = (1 ; 3) y B = (8 ; 5)

C= (8 ; 2) E = (15 ; 3) G = (16 ; 7)

OJO ACA VA EL PAPEL CUADRICULADO

Hallá las coordenadas de un punto M para que el segmento CM sea paralelo a AB y tenga la misma longitud que AB

Hallá las coordenadas de un punto P para que el segmento EP sea paralelo a AB y tenga menor longitud que AB

Hallá las coordenadas de un punto Q para que el segmento GQ sea paralelo a AB y tenga mayor longitud que AB

Son únicas las soluciones que hallaste en cada caso? Cómo lo sabés?

Problema 2

Dados los puntos A = (1 ; 7) y B = (3 ; 10), indicá sin hacer ni gráfico si cada uno de los segmentos que proponemos a continuación es paralelo a AB. Luego representá gráficamente los segmentos.

MN siendo M = (17;17) y N = (19;20)
ST siendo S = (18;14) y T = (26;26)
UV siendo U = (10; 8) y V = (16;16)

****
CONSIGNA PARA LOS DOCENTES

Traten de analizar las razones por las que se eligieron esos datos para las coordenadas de los puntos. Háganlo pensando en los posibles errores de los alumnos a propósito de estos problemas

****

Problema 3

Proponé las coordenadas de un segmento LQ paralelo al AB y menor que AB (AB es el mismo segmento que en el problema anterior) siendo L = (28, 32)

Cuántas soluciones podés proponer?

Problema 4

(En este problema AB es el mismo segmento que en el problema 2)

Sabemos que CD es paralelo a AB. C =(8; 6) y D = (10; ---). Hallá la ordenada del punto D. Cuántas soluciones se pueden proponer? Por qué?

EF es paralelo a AB. E= (8;6) y F= (11;----). Hallá la ordenada del punto F. Cuántas soluciones se pueden proponer? Cómo lo sabés?

Problema 5

Dar las coordenadas del extremo B del segmento AB sabiendo que A= (7;14) y la pendiente de AB es 2/5. Cuántas soluciones podés proponer?

Problema 6

Proponé las coordenadas de los extremos de 4 segmentos que cumplan simultáneamente las siguientes condiciones
a) la pendiente es 3/4
b) uno de los extremos tiene coordenadas (1/2; 2/5)

Problema 7

Indicá si A, B, C y D están alineados siendo

A = (1;10) B = (15; 38) C=(101; 210) y D = (300; 508)

Problema 8

Proponé las coordenadas de 5 puntos que estén alineados

Problema 9

El punto de intersección de las rectas m y s está fuera del dibujo. Encontrá las coordenadas del punto sin prolongar las rectas.

Aclaración para los docentes: Si se dispone de una computadora este problema se puede proponer en la pantalla como para bloquear la posibilidad de que los alumnos "prolonguen" las rectas.

Problema 10

Las mismas cuestiones que en el problema anterior para las rectas representadas en cada uno de los gráficos

QUINTA JORNADA

Actividad 1 (Tiempo estimado : 2 horas)

****

CONSIGNA PARA LOS DOCENTES

Qué aspectos del contenido "ecuación de la recta" no han sido tenidos en cuenta en la secuencia anterior? Qué tipos de problemas se podrían proponer para considerarlos? Qué reflexiones se promoverían con los alumnos a propósito de esos problemas?

Realicen un informe escrito como producto de esta actividad
****

Actividad 2 (Tiempo aproximado: 2 horas)

****

CONSIGNA PARA LOS DOCENTES

Lean y discutan los OBJETIVOS DE LA EDUCACION MATEMATICA del documento orientador (páginas 19 a 24)

****

Actividad 3 (Optativa)

Lectura y discusión del artículo

La matemática y la educación, de Luis Santaló.

ANEXO IV.

Este documento recupera todo el trabajo de capacitación realizado con el grupo de multiplicadores y ha sido elaborado para la capacitación de docentes primarios del mes de julio.

RESOLUCION DE PROBLEMAS EN LA CLASE DE MATEMATICA

Este trabajo ha sido elaborado por Patricia Sadovsky con la colaboración de Fany.......,Mercedes Falabella, Marta Feliú, Mabel Gaiser, María Elena Mainetti, Amelia Martinez, Adriana......, María del Carmen.......y Mercedes Falabella

Presentación

Durante el año 1993, a pedido de la Dirección de Planeamiento Educativo, he coordinado las actividades de estudio, reflexión y capacitación de un grupo de profesoras especialmente interesadas en la didactica de la matemática para el nivel primario. El objetivo era constituir un grupo que pudiera ser un referente para la capacitación de todos los maestros. Nuestro trabajo ha consistido fundamentalmente en analizar, planificar, poner a prueba, registrar y evaluar situaciones de enseñanza en los distintos ciclos de la escolaridad primaria. Hemos trabajado sobre el contenido "resolución de problemas" y la dedicación y el esfuerzo de las participantes ha hecho posible que todas las actividades planificadas se hayan llevado al aula por lo menos una vez. En algunos casos, luego de una primera puesta a prueba, hemos ajustado la propuesta a partir del análisis de la actividad realizada. Los niños, con sus intervenciones a veces sorprendentes, han contribuido a que detectáramos aspectos que en un primer momento habían pasado desapercibidos para nosotras.

El material que presentamos es el producto del trabajo de este grupo. Para su realización he contado con la colaboración y el entusiasmo de las profesoras **Fany.......,Mercedes Falabella, Marta Feliú, Mabel Gaiser, María Elena Mainetti, Amelia Martinez, Adriana......, María del Carmen........ Mercedes Falabella.** Fueron ellas quienes dedicaron su tiempo a trasmitir a los maestros de los grados donde se realizaron las situaciones los objetivos y las características de la actividad, fueron ellas quienes registraron las situaciones que luego analizamos en conjunto, fueron ellas quienes, con su esfuerzo, impregnaron de aula este trabajo.

Hemos contado permanentemente con la colaboración de la profesora Lidia Montes que ha hecho lo imposible por satisfacer todos nuestros requerimientos. A ella le estamos profundamente agradecidas.

Para la organización del trabajo hemos indicado las actividades previstas para cada día. En algunas ocasiones hemos introducido preguntas en el texto para aportar a la reflexión del grupo. La primera actividad será leer y discutir la introducción.

Para el trabajo alrededor de las situaciones correspondientes a cada ciclo les planteamos la siguiente secuencia:

a) resuelvan los problemas

2) analicen los problemas (para realizar esta tarea pueden orientarse por las preguntas que proponemos)
3) lean el análisis de nuestros resultados
4) confronten nuestros resultados con la anticipación que ustedes realizaron

Pensamos que esta metodologia enriquecerá las posibilidades del material.

Hemos previsto un trabajo de evaluación por escuela, que ustedes enviarán a la Dirección de Planeamiento. Invitamos a los docentes a poner a prueba en sus aulas las situaciones que aqui se proponen. Quienes así lo hagan pueden enviarnos sus resultados, comentarios y sugerencias.

Concebimos este material como un aporte a todos los docentes que en su tarea cotidiana, pelean por mejorar la calidad de su trabajo. Esperamos cumplir este objetivo.

Patricia Sadovsky

PRIMER DIA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- Lectura y discusión de la introducción

1. Introducción

1.1La resolución de problemas como contenido de enseñanza

Hablar de problemas en relación con la enseñanza de la matemática en la escuela primaria, no resulta una novedad. Los docentes están familiarizados con la práctica de asociar a cada contenido a enseñar un conjunto de problemas, que forman parte del campo de aplicación del concepto que intentan transmitir. Es así como los maestros suelen plantear a sus alumnos problemas de multiplicación, de división, de proporcionalidad, de múltiplos y divisores, de áreas, de perímetros, de triángulos, etc.

Ahora bien, a la hora de abordar problemas los docentes tienen muchas veces la sensación de que "algo" obstaculiza la resolución por parte de los niños, y que ese "algo" está más allá del contenido que se está trabajando.

-"Es que no comprenden el enunciado"-,
-"la dificultad con los problemas no es de matemática sino de lengua"-,
-"no saben interpretar consignas"-,

son expresiones que surgen de los maestros cuando quieren dar cuenta de las dificultades que encuentran los niños al enfocar los problemas.

Es que resolver problemas no es sencillo para los niños. Muchas veces se piensa que los alumnos progresarán en su posibilidad de enfrentar problemas como producto de la práctica. Esto es cierto en parte: si no se resuelven problemas no se puede esperar ninguna evolución. Pero confiar únicamente en la práctica es dejar a cargo del niño aprendizajes esenciales para abordar un problema de manera satisfactoria. De qué estamos hablando?

La resolución de problemas exige

- interpretar la información que se brinda

- seleccionar la información necesaria para responder las preguntas y organizarla

- tener una representación de la situación

- movilizar las herramientas matemáticas necesarias

- planificar una estrategia de resolución

- registrar los procedimientos utilizados

- arriesgar, probar, no tener miedo a equivocarse

- anticipar resultados

- rechazar procedimientos que parecen no conducir a la meta

- analizar la razonabilidad de los resultados

- **discutir si el problema tiene una varias o ninguna solución**

- **reinsertar los resultados en el problema**

- **validar el procedimiento utilizado**
- **analizar la economía de la estrategia elegida**

Ahora bien, para que el niño pueda ir logrando un uso conciente de estas estrategias es necesario considerarlas como objeto de enseñanza. En otras palabras, habrá que plantear situaciones didácticas que apunten especificamente al despliegue de cada una de las capacidades mencionadas y a la reflexión alrededor de las mismas.

1.3El tratamiento de la información

Pensemos, por ejemplo, en la siguiente actividad:

> A continuación les presentamos una serie de enunciados a los que le falta la pregunta. Analicenlos cuidadosamente y agreguen una pregunta que pueda hacerse a partir del enunciado. Luego responder la pregunta que hicieron.
>
> 1) Luis, el kioskero, estuvo armando bolsitas de 16 caramelos cada una, con los 1350 caramelos que había comprado en el negocio mayorista.
>
> 2) Con las 1350 bolitas que tenía, don Luis armó 16 cajas, todas con la misma cantidad de bolitas.
>
> 3) En el grado de Lucía organizaron una rifa. Quieren juntar dinero para comprar elementos para el laboratorio de ciencias. En el grado son 32 y decidieron vender 1000 rifas.
>
> 4) En una chacra envasan los huevos que se producen en cajas de 30. El lunes, recolectaron 53 huevos, el martes 61, el miércoles 83, el jueves 45 y el viernes 67.

La actividad apunta a que los niños analicen la información y seleccionen las preguntas que pueden ser respondidas a partir de los datos. Hemos realizado esta actividad con chicos de cuarto grado y, para el primer problema por ejemplo, los niños han planteado las siguientes preguntas:

- Cuántos caramelos puso Luis en la bolsita?
- Cuántos caramelos tenía don Luis?
- Cuántas bolsitas armó don Luis?
- Cuánto cuesta cada bolsita?
- Cuánto pagó don Luis en el negocio mayorista?

Observemos que las dos primeras preguntas pueden responderse sin necesidad de operar con los datos. Es usual que ante esta actividad los chicos no discrimen de entrada entre la información que está implícita en el enunciado y la información que se obtiene directamente de la lectura del enunciado. Justamente uno de los objetivos de esta actividad es que los niños elaboren esa clasificación.

Las dos últimas preguntas, si bien tienen sentido por el contexto, no pueden responderse a partir de los datos del problema. El hecho de que los niños las propongan hace posible la discusión y el análisis minucioso de cada uno de los datos. Cobra entonces sentido preguntar a los alumnos qué información habría que agregar para responder las dos últimas preguntas.

La diversidad de respuestas durante la actividad genera condiciones propicias para la discusión (para los niños es interesante discutir sobre las divergencias, si todos están de acuerdo no ven la necesidad de discutir).

El hecho de tener que contestar la pregunta que propusieron, actúa en los niños como un elemento de control de su propia producción. En otras palabras, las preguntas que llegan a la puesta en común, ya han "pasado una prueba" de pertinencia.

El trabajo sobre los enunciados da lugar a que los niños clasifiquen las preguntas en tres tipos

- las que se pueden responder sin operar
- las que se pueden responder operando
- las que no se pueden responder con la información que se tiene

Para la segunda clase habrá que seleccionar las operaciones necesarias para responder y para la tercera habrá que explicitar qué datos faltan.

A través de esta actividad se pone en primer plano la relación entre datos y preguntas posibles, relación compleja que requiere de un trabajo específico, diferente del de la resolución de un problema.

****

Pregunta para los docentes

Qué discusiones se podrían generar con los alumnos a partir de los enunciados 1 y 2?

****

Es interesante tener en cuenta que la información necesaria para resolver un problema puede presentarse de distintas maneras: a través de un dibujo, de un gráfico, de un enunciado, de un esquema, de un código, de una tabla, de un mapa, de un plano, etc. Actividades similares a la descripta anteriormente pueden pensarse para tratar las diversas formas de representar la información. Será entonces importante discutir con los alumnos en qué circunstancias conviene privilegiar un tipo de representación más que otro, qué pone de relieve cada una de las formas, en qué medios (diarios, enciclopedias, textos) es más usual encontrarlas. También será productivo proponer el pasaje de la información de una forma de representación a otra (por ejemplo, volcar en una tabla la información que aparece en un gráfico). A través de la discusión se puede llegar a conclusiones como las siguientes

- el gráfico permite visualizar globalmente la información
- en la tabla se resaltan más los números que en el gráfico

es más difícil encontrar la información en un texto que en una tabla o que en un gráfico

conclusiones, por supuesto provisorias, que se irán ampliando, corrigiendo, precisando a través de un trabajo que consumirá bastante tiempo.

En síntesis, pensamos que el trabajo sobre los enunciados y sobre las formas de representación de la información favorece

- la capacidad de analizar la información dada y relacionarla con la información que se busca
- la autonomía de los alumnos al encarar un problema
- el control por parte del niño de su propia su producción

1.3 El papel de las puesta en común

Al plantear distintas posibilidades para el tratamiento de la información, venimos haciendo referencia permanentemente a la puesta en común y al debate en clase.

La puesta en común se refiere a un espacio colectivo en el que los alumnos tienen la posibilidad de aprender a argumentar a favor de sus trabajos, a pensar si acuerdan o no con los resultados de los compañeros, a tomar las ideas interesantes de otros y revisar las propias. No es sencillo conseguir que los niños debatan entre ellos y para lograrlo es necesario un trabajo de mucho tiempo, que vaya instalando en el aula nuevas formas de interacción entre el maestro y los alumnos y entre los niños entre sí.

En relación con este aspecto citamos al equipo de E.R.M.E.L (1) que plantea:

"Las interacciones entre pares aseguran diversas funciones y pueden tomar formas diversas. Pero ellas no se dan por sí solas y están por lo tanto bajo la responsabilidad del maestro.

Las interacciones pueden permitir a los niños:

- apropiarse de las consignas de una situación : cada niño, frecuentemente después de un tiempo de trabajo individual, expresa el modo en que ha interpretado el enunciado, lo que no ha entendido, lo que le recuerda, por ejemplo ; la reformulación de otro niño puede permitirle comprender mejor;
- confrontar las respuestas elaboradas individualmente, comprender las divergencias eventuales para ponerse de acuerdo en una respuesta única;

- comunicar su método o su solución y defenderlos contra las proposiciones diferentes si se lo juzga necesario;
- comprender el proceso de otro, ser capaz de descentrarse de su propia investigación , cuestionarla, interpelarla;
- apreciar los elementos positivos de caminos diferentes, evaluar el grado de generalidad de cada uno;
- identificar, a menudo de modo no convencional, un procedimiento, un camino "podríamos hacer como hizo Nicolás"

Esta lista no es exhaustiva, aunque es muy ambiciosa !"

Veamos lo que el mismo equipo ERMEL plantea respecto de las **puestas en común** y de las **actividades metacognitivas**:

"El rol de mediador que juega el maestro se juega a diversos niveles. Es en principio aquel que se dirige a cada niño que le es confiado, como acabamos de plantear. Pero su rol se revela de manera crucial cuando el maestro trabaja con el conjunto de la

(7) E.R.M.E.L.(1993) Apprentissages numériques et résolution de problémes. Cours élémentaire I.N.R.P., Ed. Hatier, Paris.

clase en eso que llamamos "las puestas en común. (...) En efecto es sin duda allí donde aparece más netamente toda la dimensión de mediación que caracteriza la tarea del docente, a quien pertenece actualizar, hacer circular, y si es posible analizar y poner a discusión por el conjunto de la clase las producciones de tal alumno o de tal grupo de alumnos.

Momento esencial de la acción didáctica , toda puesta en común se muestra difícil de conducir. Nosotros vamos primero a poner en evidencia las dificultades que puede encontrar un docente en esta fase de su enseñanza, de manera de poder precisar mejor a qué apuntamos.

Estas dificultades se sitúan, en cierto modo, en dos registros opuestos:

- Una presentación exhaustiva y fastidiosa de las producciones

Se trata a veces de un momento vivido por los maestros y/o sus alumnos como "obligado" y del que no se ve casi el interés. Mientras que la maestra se consagra concienzudamente a una revisión casi exhaustiva de lo que cada uno ha hecho, los alumnos, no se sienten verdaderamente concernidos por la producción de sus compañeros, se aburren. Este momento es vivido, en este caso, como una suerte de ritual fastidioso, más o menos lleno de sentido, y ciertamente muy pobre pedagógicamente.

- Una corrección

A la inversa, después de haber dado un tiempo de investigación a sus alumnos, el maestro puede creer que es su deber poner rápidamente las cosas en su lugar. Concibe entonces la puesta en común como la ocasión privilegiada de comunicar a la clase - en fin- "la" buena solución, aquella que él ha previsto desde el inicio de la clase. Pero, al hacer esto el maestro substituye totalmente a los niños , a quienes niega el trabajo y la palabra. Distribuye las críticas y los elogios, y confunde, de hecho, la puesta en común con una "corrección" (con lo que esta palabra pueda tener de reductor, incluso de punitivo). Al imponer muy rápido, o al recibir, en una mirada más benevolente, un procedimiento particular, el docente hace un corto circuito, a menudo incluso sin saberlo, de lo que es el interés mayor de una puesta en común.

- La no intervención

Advertido de esos riesgos, el docente puede caer en otra trampa, aquella que consiste en prohibirse toda intervención de manera de no interferir con la investigación de los niños. El se impone silencio, se retrae totalmente de la situación, librando los alumnos a ellos mismos.Pero..se puede legítimamente esperar que estos últimos exhiban espontáneamente sus metodologías, alcancen a comunicar sus procedimientos originales, acepten no repetir lo que ya ha dicho otro, y sobretodo devengan capaces de considerar en perspectiva la situación particular que acaban de estudiar ?

(...) De hecho, y nosotros pensamos que esta primera observación permitirá en parte evitar el formalismo evocado precedentemente, es necesario en principio comprender que no existe una forma única para las puestas en común, por la simple razón de que no tienen todas la mismas funciones. En efecto, la función de una puesta en común depende en parte del objetivo asignado a la situación propuesta:

a) Si la situación es una situación de investigación muy abierta, nueva para los alumnos, cuyo objetivo es principalmente aprender a investigar, se espera que los alumnos se comprometan en procedimientos muy variados. **La puesta en común consiste entonces en poner el acento sobre la riqueza y la diversidad de procedimientos empleados.** La maestra va a intentar armar un inventario de procedimientos efectivamente utilizados por sus alumnos de manera de poner en evidencia o incluso valorizar la multiplicidad , la originalidad . Es importante en este caso que la maestra sepa aprovechar la ocasión de desarrollar los modos de pensar llamados "divergentes", indispensables para la creatividad matemática. Pero tendrá que organizar la presentación y el análisis de los diferentes procedimientos de manera rápida y dinámica para poder conservar la atención de los alumnos, no cansarlos, porque eso conduciría a que se quede sola trabajando en el pizarrón!

b) En sentido opuesto, si la situación apunta a la estabilización de una noción o de un procedimiento experto, **la puesta en común es el momento de la institucionalización de ese saber.** La atención de todos los niños debe ser focalizada sobre ese elemento de saber, para que devenga una indicación segura de la que la palabra de la maestra se ha hecho eco. Es el eje del pensamiento convergente el que determina el estilo de esta puesta en común. Si los discursos no son siempre eficaces y no son suficientes, son las palabras que deben ser dichas por la maestra, de manera de permitir a cada niño comprender lo que se busca que adquiera, precisar lo que se acaba de hacer, adherir a los medios que se han elegido para ello. Estas marcas, estas indicaciones, provistas en el momento adecuado, le evitan a los alumnos sentirse llevados por caminos difusos y en los que no distinguen las salidas , los resultados.

c) Entre estos dos casos extremos, en los que el trabajo del maestro no puede definirse de manera idéntica, o en los que el desarrollo mismo de la puesta en común es diferente, existe, con seguridad, toda una gama de situaciones posibles. Puede tratarse, por ejemplo, no de un simple inventario exhaustivo de procedimientos, sino, a partir de una análisis que ha podido hacer la maestra antes de la puesta en común, **de focalizar la atención sobre algunos de ellos, de manera de ayudar a los alumnos a tomar conciencia de su especificidad** : tal parece más económico, tal otro más "astuto". El rol del maestro es entonces permitir a los niños construir poco a poco, mentalmente, una suerte de jerarquía de los procedimientos utilizados, organización que debe permanecer flexible, siendo el principio de economía, con frecuencia, función de las capacidades de cada uno.

d) Una puesta en común puede igualmente ser un momento privilegiado para ayudar a los niños **a poner en evidencia las relaciones que existen entre diferentes procedimientos, las filiaciones, los parentescos.** (..) El pasaje de un procedimiento conocido a uno nuevo, reconocido como equivalente, no se produce para todos los niños en el mismo momento. El rol del maestro puede consistir entonces en señalar los niños que han utilizado procedimientos "vecinos", es decir, que ellos pueden comunicárselos e incluso apropiárselos.

Función general de las puestas en común

Sin embargo, a pesar de esta evidente diversidad, el docente no debe perder de vista la dimensión fundamental y transversal a todas las puestas en común : se trata siempre de un momento de **intercambio, de explicitación, de debate,** en el cual el lenguaje (principalmente oral pero muchas veces escrito o con apoyo en representaciones) va a jugar un rol determinante para permitir la elucidación del pensamiento.

Poner en común, es hacer público.

Hay por lo tanto que hacer aceptar progresivamente a los alumnos las exigencias de una comunicación racional. No solamente los alumnos deben aprender - y pueden hacerlo en estos momentos - las reglas de una comunicación colectiva, sino que deben igualmente aprender a formular su propio pensamiento de manera de hacerlo accesible a otro, es decir, comenzar a explicitarlo, a justificarlo. Al mismo tiempo, aprenden a tener en cuenta el pensamiento del otro, a contestar un argumento o a solicitar una explicación. Cierto, se trata de un trabajo de largo aliento y que alcanzará un desarrollo mucho más importante en el último ciclo de la primaria, pero que impone justamente una práctica regular, frecuente, rigurosa de la discusión colectiva.

Antes de estar plenamente interiorizada, la elucidación del propio pensamiento, la justificación de su punto de vista, se construyen de manera interactiva : es al ensayar responder a los "por qué ?" y a los "cómo ?" de los otros alumnos y del maestro, que cada uno es llevado a volver sobre sus propias acciones, a describirlas, a defenderlas, a tomar conciencia de su pertinencia y de su validez. Recíprocamente, es al **interrogar los caminos de otros** que cada uno puede, si la distancia cognitiva no es demasiado grande, hacer suyo un nuevo procedimiento, ampliar el campo de sus posibilidades.

Así, gracias a la exigencia colectiva de confrontación, sin cesar recordada por el maestro durante las puestas en común, el alumno toma poco a poco conciencia de su actividad mental : identificar los nuevos conocimientos, medir el grado de dominio adquirido ("yo sé que es lo que sé"), pero también reconocer lo que todavía no logra hacer solo ("Sé que es lo que tengo que aprender todavía") y los medios de los que dispone para alcanzar ese objetivo. Estas tomas de conciencia se traducen, cada vez que se encuentra el medio de hacerlo, por un trazo escrito. (...)

Estas tomas de conciencia múltiples traducen la importancia que todo docente debe acordar a las actividades metacognitivas, es decir, a todo aquello que puede permitirle al sujeto volver sobre sus acciones, sus procesos intelectuales, sobre sus propias adquisiciones, poderosa palanca de progreso en el aprendizaje."

1.4 La autonomía de los alumnos

Una de las dificultades mayores que se detectan hoy en el aula se relaciona con la gran dependencia que tienen los niños respecto del maestro. 'Está bien, seño?" es una pregunta que aparece una y otra vez cuando los chicos finalizan sus tareas. Uno de los objetivos que tiene el trabajo que estamos proponiendo es lograr que los chicos elaboren estrategias para decidir a partir de la actividad que realizan si sus resultados son o no razonables y en caso de no serlo, cómo orientar su propia corrección. Es por eso que es importante que el maestro se pregunte qué posibilidades ofrece la situación que les está planteando a sus alumnos de que ellos encuentren argumentos a favor o en contra de los que han hecho. Un aspecto que puede contribuir a progresar en la dirección deseada es que en las situaciones que se propongan incluyan explícitamente una referencia al control que queremos propiciar:

"Qué argumentos podés proponer para saber si lo que hiciste está bien o está mal?
"Mostrá una manera de saber si tus resultados son correctos"
"Cuál les parece que puede ser la respuesta a esta pregunta?"

son consignas que apuntan a la anticipación de los resultados y al posterior análisis de la razonabilidad de los mismos. Conseguir que los niños sean más independientes, más críticos, más activos, es un desafío para el maestro y es -sin duda- un objetivo al que la enseñanza de la matemática puede y debe contribuir.

****

Consigna para los docentes

Qué ideas les aporta el texto anterior para mejorar los momentos de puesta en común en sus clases de matemática?

Qué dificultades encuentran ustedes para lograr que los niños discutan entre ellos y compartan sus procedimientos?

Cuáles piensan ustedes que son las causas de la falta de autonomía de los alumnos? Se podrían lograr acuerdos entre todos los docentes para que los alumnos progresen en este aspecto?

****

SEGUNDO DIA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- Resolución por parte de los docentes de los problemas para cuarto y quinto grados
- Análisis de los problemas para cuarto y quinto grados
- Lectura del análisis de los problemas para cuarto y quinto grados
- Confrontación entre el análisis desarrollado en el material y el realizado por los docentes

2. Las problemas propuestos para cuarto y quinto grado

2.1 Qué problemas planteamos

****

Consigna para los docentes

A continuación transcribimos la secuencia de problemas que hemos planteado en cuarto y quinto grados. Les pedimos que en primer lugar resuelvan los problemas.

****

Primer problema

En el problema siguiente se han borrado ciertos datos. Observando los cálculos que hizo un chico para resolverlo, ?podés encontrar los datos que faltan?

Un repartidor ha dejado....paquetes de chocolate en una confitería:
- 3 paquetes con ....tabletas de 250 g cada tableta
- 2 paquetes con 24 tabletas de ......g cada tableta
- ....paquetes de 20 cajas de ....tabletas de 125 g cada tableta
- ......paquetes de 15 tabletas de ....g

Cuál es el peso del chocolate que el repartidor dejó en la confitería?

Solución de un alumno

(3 x 60 x 250) + (2 x 24 x 85) + (3 x 20 x 4 x 125) +

+ (10 x 15 x 75) = 120 330

Segundo porblema

En el enunciado de este problema también faltan algunos datos.

Un corredor da 5 vueltas a una pista
que tiene la forma que se muestra en
el dibujo:
Recorre en total ....m

ab y cd tienen cada uno....... m

Cuál es la longitud de ad y bc?

Un alumno realizó los siguientes cálculos. Observalos y verificalos para obtener los datos que faltan en el enunciado.

2035 : 5 = 407
2 x 125 = 250
407 - 250 = 157
157 : 2 = 78,5

Tercer problema

Primera parte (una clase)

Un maestro tiene $ 450 para comprar libros. Tiene que comprar dos clases de libros: unos cuestan $ 19 y los otros $ 26. Cuántos libros de $ 19 y cuántos de $ 26 puede comprar?

Segunda parte (una clase)

Tomando en cuenta el enunciado anterior el maestro propone estas soluciones

SOLUCION 1	SOLUCION 2
26 + 19 + 19 = 64	26 + 26 + 19 = 71
64 X 7 = 448	71 X 6 = 426
448 + 2 = 450	426 + 19 + 5 = 450

Preguntas para el alumno

?Cómo pensó el problema alguien que hizo la solución 1 ?
?Cómo pensó el problema alguien que hizo la solución 2 ?
?Cuál es la respuesta según la solución 1? Y según la solución 2?
?Cómo habría que modificar el enunciado para que solamente la solución 1 fuera la correcta?
?Cómo habría que modificar el enunciado para que solamente la solución 2 fuera la correcta?

(Los tres problemas han sido tomados del libro Objectif calcul CM1, de Yves Clavier, Jeanne Bia y Claude Maréchal, Ed Hatier)

Antes de continuar con la lectura

****

Consignas para los docentes

Traten de analizar para cada uno de los problemas anteriores:

1) qué capacidades se ponen en juego para la resolución de los mismos

2) cuáles pueden ser los procedimientos de los alumnos

3) cómo podría organizarse la clase

4) qué aspectos sometería a debate?

5) qué conclusiones remarcaría el

docente en la puesta en común
****

3.2 El objetivo de los problemas para cuarto y quinto grados

Tanto el problema del repartidor de chocolate como el del corredor, apuntan a poner en primer plano las relaciones entre datos de un enunciado y operaciones necesarias para obtener nueva información. Efectivamente, en ambos problemas el alumno debe analizar cada una de las operaciones que forman parte de la resolución, y establecer el significado de los elementos que intervienen en la misma.

En tanto en el problema del repartidor todas las operaciones parciales tienen la misma estructura, en el problema de la pista se combinan distintos tipos de operaciones. Por otra parte, en el problema de la pista es necesario coordinar los datos que se obtienen al interpretar la solución con la información que brinda el dibujo. Será interesante explicitar las diferencias entre los dos problemas en el momento de la puesta en común.

La primera parte del problema de la compra de libros tiene por objetivo que los niños descubran que se trata de un enunciado con varias respuestas posibles ya que no se dan condiciones respecto de cómo deben distribuirse el dinero o los libros. Esta actividad permite discutir con los alumnos qué tipos de restricciones habría que plantear para que el problema tuviera una única solución (por ejemplo, el maestro quiere comprar la misma cantidad de libros de cada clase, o, el maestro quiere gastar la mitad del dinero en los libros de $ 19 y la otra mitad en los libros de $ 26). Esta discusión se profundizará a raiz de la segunda parte de la actividad en la que los niños deben interpretar dos soluciones de las varias posibles que tiene el problema. El trabajo de los chicos para la segunda parte consiste en analizar

- qué informa cada uno de los cálculos que se proponen
- cuál es la respuesta que corresponde a esos cálculos
- cuál es la condición que hay que plantear en el enunciado para restringir el problema a esa única solución

Proponer enunciados en los que varias respuestas son posibles, enunciados con infinitas respuestas posibles, enunciados con una única respuesta, enunciados en los que no es posible obtener una solución puede resultar una actividad productiva para que los niños progresen en sus posibilidades de comprender los problemas. Un trabajo como este permitiría poner la mira sobre las siguientes cuestiones:

- siempre es posible pasar de un enunciado con varias soluciones a otro con solución única, agregando condiciones que restrinjan las alternativas
- si un problema no tiene solución, es porque las condiciones del enunciado son incompatibles entre sí
- si la solución es única, se pueden quitar condiciones al enunciado para dar lugar a distintas alternativas.

2.3 Los problemas anteriores en el aula: algunos comentarios

El problema del repartidor

Los niños se manifestaron asombrados ante la tarea cuando les presentamos el problema del repartidor de chocolate: se trataba de una actividad en la que no había que "hacer cuentas", había que analizar el significado de cálculos que ya estaban hechos. Llevó un tiempo lograr que los chicos entraran en la consigna -muchos volvían a hacer los cálculos planteados en la solución- pero finalmente la misma fue comprendida.

Hemos podido observar que muchos niños respondían mecánicamente, siguiendo el orden de los números que aparecen en la solución, pero sin comprender verdaderamente el sentido de los mismos. Este hecho se hizo evidente para nosotros cuando los alumnos trataban de responder la pregunta del problema sumando los gramos que figuran en cada renglón de la información e ignoraban que la respuesta ya estaba dada (120 330). A partir de esta constatación hemos tomado algunas decisiones:

- cambiar el orden de los términos en la solución, de manera que el mismo no se corresponda con el orden en que están dados los datos;
- pedirles a los chicos que expliquen el significado de cada una de las multiplicaciones que aparecen en la solución.

Estas modificaciones hicieron que una segunda puesta a prueba -con otros niños- resultara más satisfactoria.

En la escuela 16 de General San Martín, Mabel Baiser propuso unos días después el siguiente problema

> Analizá el siguiente enunciado en el que faltan algunos datos y completálos a partir de la solución que te mostramos
>
> Un vendedor de yerba deja en la Cooperativa local, ...cajas de yerba.
> 3 cajas de ....paquetes de 1000 g
> 7 cajas de ....paquetes de 250 g
> 5 cajas de 18 paquetes de ....g
> 2 cajas de ....paquetes de 500 g
>
> ?Cuál es el peso total de la yerba?
>
> SOLUCION
>
> (5 x 18 x 500) + (3 x 6 x 1000) + (7 x 250 x 12) +
> + (2 x 10 x 500) = 94 000

Luego agregó las siguientes preguntas

> ?Cuál es el peso total de los paquetes de 500 g?
> ?Cuál es el total de paquetes?

****

Consigna para los docentes

?Cuál piensan ustedes que es la intención de estas dos últimas preguntas?

****

Al tratar de completar el texto los niños reconocen fácilmente que el orden de los datos no se corresponde con el orden de los cálculos. En general, se completa el texto del enunciado sin dificultad.

Para calcular los gramos algunos chicos suman

1000 + 500 + 250

La maestra les dice que hay más gramos, que piensen mejor. Los niños recuerdan el problema del repartidor de chocolate y muchos revisan la solución de ese problema para resolver este otro. Volver sobre lo ya producido para reutilizarlo en otra situación, suele ser muchas veces una estrategia productiva. Es interesante que esta idea circule entre todos los niños.

La pregunta sobre la cantidad de paquetes también ofrece dificultades para algunos niños, que confunden cajas con paquetes. La maestra sugiere que hagan un dibujo. Algunos chicos dicen que al hacer los dibujos se dan cuenta de cómo deben hacer.

Cabe aclarar que no era nuestra espectativa que el problema fuera resuelto sin dificultad por todos los alumnos de la clase. Vencer obstáculos es inherente al aprendizaje. Si todos hubieran respondido con comodidad, no se hubiera tratado de un problema nuevo para los niños. Nuestro objetivo era que ellos establecieran nuevas relaciones y analizaran el significado de los cálculos. Justamente las dificultades muestran que más allá de las cuentas -con las que en general no hubo trabas- la estructura multiplicativa todavía se está elaborando y el problema ofrece una oportunidad para seguir pensándola.

Pocos días después se les plantea a los mismos niños el siguiente problema:

> En el kiosko "Plaza" en el mes de octubre se vendieron las siguientes cantidades de chocolate:
>
> 3 cajas de 10 tabletas de $ 2 cada una
> 2 cajas de 12 tabletas de $ 4 cada una
> 4 cajas de 15 tabletas de $ 1 cada una
>
> ?Cuántas tabletas se vendieron en total?
> ?Cuánto dinero se recaudó con esta venta?
> ?Cuántas cajas se vendieron en total?

****

Consigna para los docentes

?Cuál piensan ustedes que es el objetivo de haber planteado este último problema?

****

El problema de la pista

Muchos niños completan el renglón del enunciado escribiendo 250 en lugar de 125. Vuelve a ponerse en evidencia la necesidad de discriminar entre datos del enunciado y resultados parciales que se van obteniendo. La discusión acerca de la información que brinda cada cálculo de la solución resulta muy rica y productiva.

El problema de los libros

Al plantear el problema de los libros en una de las aulas, distintos grupos de niños obtuvieron diferentes soluciones, pero sin anticipar que el problema, tal cual estaba planteado tenía más de una solución. Fue al confrontar las distintas propuestas que surgieron en cada uno de los grupos, que los alumnos tomaron conciencia de que se trataba de un planteo abierto. Muchos alumnos dieron por supuesto que había que comprar la misma cantidad de libros de cada tipo, mientras que otros niños repartieron el dinero en partes iguales. Hubo alumnos que pensaron que las dos alternativas recién expuestas eran equivalentes, es decir que si se reparte el dinero en dos partes iguales, serán iguales las cantidades de libros de cada clase. Todo esto da lugar a discutir las siguientes cuestiones:

- el enunicado no especifica ni que las cantidades deben ser iguales para las dos clases de libros, ni que debe emplearse la misma cantidad de dinero para cada clase

- si se emplea la mitad del dinero para cada clase, no se compra la misma cantidad de libros de cada tipo.

Cuando se invita a los alumnos que proponen que se pueden comprar 10 libros de cada clase, a buscar nuevas soluciones, ellos suponen que cualquiera sea la alternativa que se elija, siempre se podrán comprar 20 libros en total. Esta suposición los lleva a plantear las siguientes soluciones

9 libros de $ 26 y 11 libros de $ 19 o
8 libros de $ 26 y 12 libros de $ 19 o
7 libros de $ 26 y 13 libros de $ 19 etc.

Observamos que el hecho de mantener la condición de que los libros sean 20 en total les impide darse cuenta de que en el último caso sobran $ 21 lo cual hace posible comprar un libro más de los de $ 19. Es claro que surge aquí otra cuestión interesante para discutir.

En otro grado, la mayoría de los niños propuso el siguiente procedimiento:

19 + 26 = 45,   450 : 45 = 10

Pero, muchos de estos alumnos deducían a partir de este cálculo que el maestro compraba cinco libros de cada clase. Cuando se sometió esta respuesta a discusión algunos chicos hicieron un dibujo para convencer a sus compañeros de que estaban en un error.

En este mismo grado, un grupo de chicos fue sumando alternativamente
19 + 26 + 19 + 26 ....

En el momento de confrontar los distintos procedimientos estos mismos chicos autocriticaron su estrategia por lo antieconómica que había resultado.

Luego de haber discutido las distintas propuestas la maestra solicitó a los niños que modificaran el enunciado para que la única respuesta posible sea "El maestro compra 10 libros de cada clase". Esto provocó bastante discusión y se hicieron sucesivas correcciones hasta que la totalidad de la clase aceptó una única redacción. Queremos remarcar el interés de un momento de producción colectiva en el que a partir del análisis de diversas propuestas se llega a un acuerdo entre todos los alumnos.

Veamos la propuesta de algunos niños de la Escuela Nº 17 de Intendente Alvear, a la hora de modificar los enunciados

Para la solución 1, Sebastián propone

> "Un maestro tiene que comprar libros. Tiene \$ 450. Tiene que comprar dos clases de libros: de \$ 19 y de \$ 26. De \$ 19 adquiere el doble de libros que de \$ 26 y le sobran \$ 2. Cuántos libros de cada clase compra?"

Ante esta propuesta vale la pena someter a discusión con todo el grupo si es necesario decir en el enunciado "sobran \$ 2". En realidad, la propuesta de Sebastián pone de manifiesto la dificultad persistente para discriminar entre la información que hay que dar en el enunciado y la que se obtiene a partir de operar con los datos.

Son muchos los niños que, para la solución 2 proponen la siguiente modificación del enunciado:

> "Un maestro tiene \$ 450 para comprar dos clases de libros : de \$ 26 y de \$ 19. Cuántos libros comprará de cada clase si le sobran \$ 5"

Es interesante preguntar entonces si la compra que plantea la solución 2 es la única en la que sobran \$ 5.

A partir del trabajo con estos problemas evaluamos que sería productivo completar la secuencia planteándoles a los chicos una serie de cálculos para que ellos propongan problemas que se resuelvan a través de esos cálculos.

****

Consigna para los docentes

Ahora les proponemos que confronten el análisis que ustedes realizaron con el que desarrollamos en el módulo: encontraron cuestiones en común?, cuáles? Hay divergencias? En qué aspectos? Redacten un informe con las conclusiones que pueden obtener a partir de esta actividad.

****

TERCER DIA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

Resolución de los problemas del tercer ciclo
Análisis de los problemas
Lectura de las reflexiones que se plantean en el módulo acerca de los problemas para el tercer ciclo.
Confrontación entre el análisis de los docentes y el análisis propuesto en el módulo.

3. Problemas para sexto y séptimo grado

3.1 Qué problemas planteamos

****

Consigna para los docentes

A continuación presentamos los problemas que hemos propuesto para sexto y séptimo grado. Les proponemos que resuelvan los problemas y discutan

- qué objetivo puede tener plantear estos problemas a los alumnos
- qué discusiones se podrían generar en clase luego de la resolución
- qué aspectos remarcaría el docente al finalizar la puesta en común

****

Problema 1

Pablo organizó un juego con bolitas. Usó potes para hacer "casitas". Las casitas valían 25, 20, 5 y 12 puntos respectivamente. Cada participante debía deslizar 5 bolitas tratando de embocar en las casitas. Luego se sumaban los puntos según donde hubiera embocado.
María obtuvo 30 puntos, qué casitas embocó en sus 5 tiros?
Pablo obtuvo 100 puntos, podés relatar cómo hizo ?

Problema 2

Tengo un paquete de caramelos y quiero distribuirlo en bolsitas con la misma cantidad de caramelos cada una. Si coloco 2 caramelos en cada bolsita, me queda 1 suelto. Si coloco 3 caramelos en cada bolsita, para la última me quedan 2 caramelos. Cuando pruebo colocando 4 caramelos en cada bolsita, me sobran 3. Finalmente puedo armar bolsitas con 5 caramelos sin que queden caramelos sueltos. Cuántos caramelos tiene el paquete?

Problema 3

Un aldeano tenía en su corral 35 gallinas y se propuso distribuirlas en sus 6 gallineros. El hombre era bastante raro y por razones que se ignoran creyó que le sería conveniente que en cada gallinero hubiese una cantidad impar de gallinas. Hace horas que el hombre está acomodando, sin éxito, sus animales. Podés ayudarlo?

Problema 4

En el teatro Roma hay 2500 localidades. En el mes de octubre se hicieron 2[illegible] representaciones. Cuántas entradas se vendieron?

3.2 Algunos comentarios en relación con los problemas

La secuencia apunta a que los niños clasifiquen entre problemas con una, varias, infinitas y ninguna solución. El problema del juego de las bolitas es muy sencillo, y tal vez la cuestión más interesante a trabajar en relación con este problema sea que los alumnos encuentren un método para estar seguros de que han obtenido todas las soluciones en cada caso. Qué queremos decir? En general, ocurre que los niños encuentran más de una solución pero que no pueden asegurar que han hallado todas las que existen. Es necesario que busquen las soluciones a través de algún procedimiento que les asegure haber contado todos los casos. Veamos, por ejemplo, que 30 puntos se podrían obtener de todas estas maneras

25	5	0	0	0	o
20	10	0	0	0	c
20	5	5	0	0	o
10	10	10	0	0	n
10	10	5	5	0	o
10	5	5	5	5	

(no estamos considerando en qué orden se embocaron las distintas "casitas")
En este caso hemos contado las distintas posibilidades analizando que si en uno de los tiros se emboca el 25, la única forma de reunir los 30 puntos es embocar solamente un tiro más de 5 puntos, si uno de los tiros es de 20, los otros 10 se pueden reunir de dos maneras:un tiro de 10 o dos de 5; si el valor más alto que se emboca es 10, los otros 20 se pueden obtener con dos de 10, uno de 10 y dos de 5 o cuatro de 5; finalmente no se pueden obtener 30 puntos en 5 tiros embocando solamente "casitas" de 5 puntos.De esta forma estamos seguros de haber analizado todas las posibilidades.

El problema de los caramelos

El problema de los caramelos ofrece más dificultades. Una estrategia muy frecuente es que los alumnos empiecen a probar con los sucesivos múltiplos de 5 hasta llegar a 35 que es el primer número que cumple las condiciones del problema y aseguran que en el paquete había 35 caramelos sin que consideran de entrada otras posibilidades.

****
Consigna para los docentes

Supongamos que la totalidad de la clase obtiene 35 como respuesta. Cómo desbloquearía la situación para que aparezcan más soluciones?

****

Al invitar a los chicos a encontrar más soluciones, ellos siguen probando con los sucesivos múltiplos de 5. Es así como muchos chicos han encontrado que el 95 es también solución del problema. Hay más soluciones? Cada cuánto se encuentra una solución? Veamos lo que dice Angela, alumna de séptimo grado de la escuela 17 de Intendente Alvear

> "Tiene infinitas soluciones. Primero descubrí el 35, luego el 95 y fui sumando 60, porque la diferencia entre la primera solución y la segunda era 60".

****

Consigna para los docentes

Es correcta la afirmación de Angela?
Es correcta su justificación?

****

En realidad, la afirmación de Angela es correcta pero no lo es su justificación. El hecho que la distancia entre las dos primeras soluciones sea 60 no alcanza para asegurar que cada 60 números a partir del 35, se encuentra uno que cumple las condiciones del problema.

La justificación aparece clara si se piensa en la relación que existe entre la solución que se busca y los múltiplos de 2, 3 y 4. De qué relación estamos hablando? Si al dividir un número por 4 el resto es 3, ese número es una unidad menos que un múltiplo de 4. De la misma manera, si al dividirlo por 3 el resto es 2, el número buscado es uno menos que un múltiplo de 3. Está claro también que la cantidad de caramelos del paquete es un número impar que se puede pensar como uno menos que un múltiplo de 2. Resulta entonces que un número es solución del problema si es uno menos que un múltiplo común de 2, de 3 y de 4 y, al mismo tiempo es múltiplo de 5. Ahora bien, uno menos que un múltiplo de 2, se obtiene cada dos números, uno menos que un múltiplo de 3 se obtiene cada 3 números y uno menos que un múltiplo de 4 se obtiene cada 4 números. Todo esto nos permite asegurar que uno menos que un múltiplo común de 2, 3 y 4 se obtiene cada 12 que es justamente el mínimo común múltiplo de 2, 3 y 4:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27

Ahora resulta más fácil entender que uno menos que un múltiplo común de 2, 3 y 4 que sea al mismo tiempo múltiplo de 5, se encontrará cada 60 números que es el mínimo común múltiplo de 12 y de 5.

****

Consignas para los docentes

Comparen la estrategia de buscar las soluciones a partir de los sucesivos múltiplos de 5 y la expuesta en los párrafos anteriores. Qué ventajas y desventajas tiene cada una?

Supongamos que ningún alumno encuentra la razón por la cual cada 60 números se halla una solución, qué harían ustedes en ese caso ?

****
Consigna para los docentes

Cómo modificarían el enunciado del problema para que tenga solamente dos soluciones?

Tendría sentido dar la consigna anterior a los alumnos? Cuál sería el objetivo de hacerlo?
****

El problema del aldeano

Seguramente ya se dieron cuenta de que el problema del aldeano no tiene solución. Justamente decir que no tiene solución es encontrar la respuesta del problema. Claro, para ello hay que dar un argumento de tipo general. Muchas veces los alumnos dicen que un problema no tiene solución porque ellos no la han encontrado. Es necesario que los niños distingan que se trata de dos cuestiones diferentes: una cosa es no encontrar la solución de un problema y otra es encontrar un argumento a través del cual se asegura que el problema no tiene solución

> "No tiene solución porque no puedo repartir un número impar de gallinas en una cantidad par de gallineros y que en cada gallinero la cantidad de gallinas sea impar ya que si sumo seis números impares el resultado siempre será par"

Argumentos como el anterior fueron los que propusieron los alumnos de la profesora María Elena Muinetti, de la escuela 17 de Intendente Alvear. Veamos otras opiniones de los chicos de esc grado, después de haber realizado la secuencia anterior:

> "Me gustó descubrir que un problema puede tener más de una solución como también no tener solución" (Angela)

> "Además uno en la clase da a conocer cómo lo resolvió y luego comparamos cómo lo hicieron los demás y así también nos damos cuenta si cometimos algún error" (Iván).

Al final de la secuencia le hemos planteado a los chicos que modifiquen los enunciados de los problemas para todos tenga exactamente una solución. La puesta en común de esta actividad dio lugar a nuevas discusiones. Serían ustedes capaces de imaginarlas?

CUARTO DIA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

Lectura análisis y discusión de la situación propuesta para primer grado.

Lectura y análisis de una situación propuesta para segundo grado en una experiencia realizada en la Municipalidad de Buenos Aires. (Esta última actividad se plantea como optativa)

4. Una situación para primer grado

(La situación planteada fue adaptada de una propuesta publicada en el número 50 de la revista Grand N (1991). Se trata de un artículo de Elisa Martinelli).

Se presenta a los niños una lámina en la que aparecen algunas informaciones numéricas. En un primer momento los niños deben mirar la lámina y comentarla con su compañero. El objetivo de esta actividad es poner en común palabras que puedan ser desconocidas para algunos, familiarizarse con la situación representada en el dibujo, reparar en diversos detalles, en fin, favorecer las condiciones de trabajo para la segunda y tercera parte de la actividad.

Luego se invita a los niños a formular preguntas acerca de la lámina. Una vez que los niños hacen una lista de preguntas las mismas se clasifican en tres grupos:

- preguntas que no se pueden responder a partir de la lámina
- preguntas que se responden mirando la lámina pero sin hacer cuentas
- preguntas que se responden haciendo operaciones con los datos de la lámina

Establecidas las tres clases, se pide a los niños que planteen preguntas y que indiquen en qué grupo las ubicarán. El objetivo de esta última actividad es poner a prueba la clasificación de preguntas que se ha establecido.

La clase siguiente se plantea a los niños un problema acerca de la lámina para que ellos resuelvan por grupos. Luego se someten a discusión las distintas respuestas que se han encontrado.

En una tercera clase se pide a los niños que propongan problemas a partir de la lámina. En esta actividad queda a cargo de los niños la selección de los datos que tendrán en cuenta tanto para plantear el problema como para resolverlo. La formulación de problemas por parte de los niños hará posible ir elaborando una diferenciación entre preguntas y enunciados.

Esta situación se puso a prueba en un primer grado de la escuela 16 de General San Martín y en un primer grado de una escuela de 25 de Mayo que dirige Marta Feliú. Se usaron láminas distintas en cada una de las dos escuelas (ver páginas siguientes).

En la escuela 16 de General San Martín, los niños se organizan en grupos de tres o cuatro chicos. De la descripción general surgen los siguientes comentarios: hay un kiosco, parece Bariloche, hay una boletería para hacer viajes a la montaña en los globos. Hay tres personas para sacar boletos, se sube a los video juegos. Hay árboles, coches, carro, caballo.

Cuando la maestra solicita a los alumnos que, en cada uno de los grupos hagan preguntas acerca de la lámina, los niños comienzan enunciando elementos sueltos. La maestra interiviene enotnces aclarando que no se trata de hacer un listado sino de preguntar, por ejemplo, "Qué hay lado del video juego?. Pasados 20 minutos, la maestra pide a cada grupo que lea las preguntas mientras ella las va anotando en el pizarrón:

Preguntas de los niños

Qué tiene la casa?
Qué son esos huevitos con ventanas y puertas?
Qué compran los chicos?
Para qué compran los boletos?
Qué es esa casa redonda?
Por qué hay pinos?
A dónde están las casas?
Cuánto salen las pastillas?
Cuánto cuestan dos helados?
Cuánto vale una palcta?
Cuánto sale una coca y un pancho especial?
Cuánta plata necesito para subir a la montaña?
Cuánta plata necesito para ir a los video juegos?
A dónde van las nenas?
A dónde van los autos?
Cuánto salen los boletos?
Cuántos salen los helados?
Cuánto vale un pancho?
A dónde van las personas?
Cuánto sale una tita ?

Luego se hace la clasificación de las preguntas. Se trabaja en forma conjunta en el pizarrón. Observemos que, en principio los niños no plantean ninguna predilección por las preguntas de tipo "matemático".

OJO ACA VA LA LAMINA

La segunda clase la maestra reparte hojas impresas con la misma imagen y el siguiente problema:

> Cuánto gasta una familia de tres personas para ir a los video juegos?

Los niños comienzan su trabajo. A medida que van resolviendo el problema, ellos quieren saber si la operación que proponen es correcta. La maestra hace comentarios con los chicos pero no les responde acerca del tipo de operación que deben hacer y les hace saber que una vez que todos terminen discutirán las distintas propuestas en el frente. Una vez finalizada esta etapa de la actividad, se antotan todos los cálculos propuestos en el pizarrón. Algunos niños cambian su càlculo en el momento en que lo dictan. Estos son los cálculos que dictan los niños

a) 2 + 2 + 2 = 6
b) 3 + 3 = 6
c) 6 + 6 + 6 = 18
d) 6 + 6 = 12
e) 6 + 2 = 8
f) 6 + 6 + 6 + 6 = 24
g) 2 + 3 + 1 = 6

Una vez anotados todos los cálculos se les plantea a los niños la siguiente cuestión: hay distintas propuestas para resolver el problema, vamos a discutir entre todos si todas son correctas. Es decir, no se anuncia de entrada que algunos de los cálculos no son pertinentes, tratando de no apurarse en convalidar lo correcto e invalidar lo incorrecto. Esta estrategia tiene por objetivo mejorar las condiciones del debate, generando cierta incertidumbre alrededor de aquello que se va a discutir.

Justificaciones de los niños

Respuesta a: Porque para entrar a los videos cada uno debe pagar $ 2
Respuesta b: Porque tomó en cuenta los precios del kiosco
Respuesta c: Hizo esa cuenta porque le gustaba
Respuesta d: Porque pagaron $6 para subir y cada uno pagó $2 para entrar a los videos, y entonces gastaron $ 6 para entrar
Respuesta e: Porque pagaron 6 para subir y 2 para entrar
Respuesta f: Para justificar mira el cartel del kiosco e intenta explicar pero no puede
Respuesta g: Porque compró golosinas.

Luego de discutir acerca de las distintas propuestas los niños acuerdan en sacar las respuestas que tuvieron en cuenta los precios del kiosco. Se debate también si el viaje cuesta $6 para los tres o $ 6 por cada integrante de la familia. La cuestión del precio de entrada a los videos genera incertidumbre ya que algunos niños piensan que se deben pagar $ 2 en total. Finalmente los alumnos están de acuerdo en que la familia gasta $ 6 para subir y $ 6 en boletos que surgen de hacer 2 + 2 + 2.

Una aclaración es necesaria: hemos decidido intencionalmente incluir información algo ambigua respecto del precio del viaje a los viduos para generar cierta incertidumbre y mejorar las condiciones del debate colectivo.

Transcurridos algunos días, la maestra de este grado planteó actividades similares, y pudo constatar cierto progreso en el desempeño de los niños frente a esta actividad.

La lámina con la que se trabajó en la escuela de 25 de mayo fue la siguiente

OJO VA LAMINA EN ESTA PAGINA (VER IMPRESO)

También en esta oportunidad los niños comenzaron por hacer un listado de cosas que observaban en lugar de plantear preguntas. La maestra les solicita que le hagan una pregunta a ella para recordar cuál es la estructura de una pregunta. Veamos qué sucede en el aula a partir de entonces:

Jesica: Querés ir al parque?

Muchos: Querés?

Alexis: Querés ir al circo? (En ese momento hay un circo en 25 de mayo)

Otro chico: Vamos al parque?

Maestra: Háganme una pregunta que no tenga "querés" ni "vamos"

(Los niños insisten con preguntas del tipo "querés" hasta que un chico pregunta

Niño: Quiénes van en el bote?

Maestra: Cómo respondemos esa pregunta? (La maestra hace esa pregunta pues se da cuenta de que el niño está pensando en la cantidad de personas que van en el bote)

Niño: .....

Maestra: Si tuvieras que ir a segundo grado a preguntar la cantidad de chicos que vinieron hoy, cómo dirías:

Niño: Ah!!! Cuántos van en el bote!!

Es interesante señalar en este caso la intervención de la maestra, ayudando al niño a buscar la palabra adecuada para formular la pregunta.

****

Consignas para los docentes

Analicen cuidadosamente los objetivos de la actividad anterior

****

Nota: la siguiente actividad será realizada de manera optativa, cada grupo evaluará en función del tiempo, qué posibilidades tiene de realizarla

A continuación presentamos tres actividades elaboradas y puestas a prueba por el grupo de desarrollo curricular de la Municipalidad de Buenos Aires, dirigido por Cecilia Parra e Irma Saiz. Las mismas aparecen publicadas en el libro Los niños, los maestros y los números, de las autoras mencionadas, editado en 1992 por la Municipalidad de Buenos Aires.

****

Consigna para los docentes

Lean la siguientes actividades propuestas para segundo grado. Luego analicen y discutan acerca de los objetivos de la misma.

****

Actividad A

Objetivo: Analizar la pertinencia de las relaciones entre cálculos y preguntas.

Se presenta a los niños la siguiente situación:

"El parque"

"Los chicos de tercer grado están en el parque, son 34.
Los acompaña la maestra y dos mamás.
7 nenas juegan en las hamacas, 11 varones juegan al fútbol y una mamá es el referi.
9 nenas y 3 varones juegan al voley. Los demás varones están en el tobogán".

1) Se plantea a toda la clase que un alumno estaba trabajando con esta situación y escribió el siguiente cálculo: 7 + 9 =

Se pide a los alumnos que piensen y propongan cuál habrá sido la pregunta que él buscaba responder.

2) Se propone a los alumnos una actividad de planteo de cálculos y formulación de las preguntas que buscan responder

Organización de la clase:se forma un número par de grupos, por ejemplo, 6 grupos. La mitad de los grupos son emisores y la mitad receptores.1 Los emisores, trabajando sobre la situación, van a pensar y escribir un cálculo al grupo receptor. Los receptores piensan, escriben y envían la pregunta que corresponde.

El grupo emisor analiza la pregunta y la acepta o no antes de reunirse con el grupo receptor y discutir sus producciones.

Se vuelve a hacer intercambiando los roles de emisor y receptor. Después de las dos vueltas se vuelca el trabajo al pizarrón para analizarlo

Equipo	Cálculo	Equipo	Pregunta

Se analiza la relación entre los cálculos y las preguntas. Puede suceder que la pregunta no sea la que corresponde o que el cálculo sea una simple operación entre números sin significado en el contexto del problema.

También se observa si hay distintas preguntas para un mismo cálculo y qué relación hay entre ellas. Si hay muchas repetidas y faltan otras se puede pedir que busquen más, en grupos o colectivamente.

En otra clase, si no ha aparecido previamente, la maestra puede proponer un cálculo de tres términos, sobre la misma situación. Por ejemplo, 11 + 9 + 3 , que corresponde al total de los chicos que están practicando un deporte.

Actividad B

Objetivo: producir y analizar preguntas según restricciones dadas relativas al carácter de la información que se obtiene.

Se presenta a los niños la siguiente situación:

"La fábrica de globos"

"En la fábrica envasan 10 globos en cada bolsita. Hoy fabricaron 123 y ya llenaron 4 bolsitas. Hicieron 18 azules, 56 rojos, 23 amarillos, y los demás verdes".

Organización de la clase: por grupos de 4 alumnos.

Consigna: "Cada equipo va a pensar todas las preguntas que puedan sobre esta situación. Van a trabajar.... minutos. Pero atención! No valen las preguntas cuya respuesta ya figura en el texto, por ejemplo, no vale preguntar "Cuántos globos fabricaron hoy?. Tampoco valen las preguntas que no se pueden contestar con el texto, por ejemplo, "Dónde queda la fábrica?"

Cuando presenten sus preguntas vamos a analizarlas entre todos. Si la pregunta vale, y ningún otro equipo la hizo, ganan 10 puntos. Si la pregunta vale pero la hicieron dos o más equipos, ganan 5 puntos".

Actividad C

Trabajo individual

Se propuso el siguiente problema para que cada alumno formulara todas las preguntas que le fueran posibles de acuerdo a las reglas con las que habían trabajado: no preguntas relativas a información que está dada en el enunciado, no preguntas que no se pueden responder trabajando con esos datos.

"El tren"

"Un tren con 4 vagones llega a la estación. En cada vagón pueden viajar 50 pasajeros. En el primer vagón hay ya 23 pasajeros instalados, 10 en el segundo, 42 en el tercero y el último todavía está vacío. En el andén hay 86 pasajeros esperando para subir".

QUINTO DIA

ACTIVIDAD DE EVALUACION

Como ya hemos dicho en la introducción del material, esta actividad será elaborada por el conjunto de los docentes de la escuela y remitida a la Dirección de planeamiento para su evaluación. No se trata de elaborar un producto para cumplir con el requisito de evaluación de esta instancia de capacitación, esperamos que la lectura del material y el trabajo de estos días les haya aportado elementos para elaborar una secuencia que les resulte útil para su propia práctica.

ACTIVIDAD PARA EL DOCENTE

Hemos hablado de la importancia de que los alumnos tengan la oportunidad de analizar la información presentada en distintos contextos: verbal, gráfico, a través de dibujos, mapas, recortes, afiches, prospectos, etc.

Propongan una secuencia para el segundo o tercer ciclo que exija que los alumnos pongan en juego la capacidad de discriminar distintos tipos de información y seleccionar la que sea pertinente para formular problemas matemáticos.

Analicen cuáles de las capacidades específicas de la resolución de problemas que fueron consideradas en la introducción del módulo se pondrían en juego a través de la situación que plantearon.

Anticipen posibles modos de organización de la clase, ventajas y desventajas de la opción que hagan, posibles respuestas de los alumnos, modos de intervención docente a propósito de las respuestas previstas, aspectos a considerar en la puesta en común.

ACTIVIDAD OPTATIVA

Lectura y discusión del artículo : Aprender (por medio de) la resolución de problemas, de Roland Charnay, publicado en el libro "Didáctica de matemáticas" compilado por Cecilia Parra e Irma Saiz, editorial Paidós, 1994.

BIBLIOGRAFIA

CLAVIER,Y; BIA,J; MARECHAL,C (1989) Objectif calcul CM1, Francia, Hatier.

LERNER,D (1992) La matemática en la escuela aquí y ahora, Buenos Aires, Aique Grupo Editor.

MARTINELLI,E (1991) [illegible], publicado en Grand N número 50, IREM de Grenoble.

PARRA,C; SADOVSKY,P; SAIZ,I (1994) Matemática y su enseñanza. Programa de Transformación de la Formación Docente. Ministerio de Cultura y Educación.

PARRA,C y SAIZ,I (199[illegible]) Los niños, los maestros y los números. Desarrollo curricular. Matemática 1o y 2o grado, Municipalidad de la Ciudad de Buenos Aires.

PANIZZA,M y SADOVSKY,P (19[illegible]) Documento de [illegible]ción de la enseñanza de la matemática [illegible]. [illegible]palidad de Buenos Aires.