

PLAN AGUA SUBTERRANEA

CONSEJO FEDERAL DE INVERSIONES

FONDO ESPECIAL NACIONES UNIDAS

TEORIA DEL MOVIMIENTO DEL AGUA SUBTERRANEA

Por .

M. King Hubbert

SAN JUAN

Argentina-1967

93518



262

CATALOGADO

PLAN AGUA SUBTERRANEA

CONSEJO FEDERAL DE INVERSIONES

FONDO ESPECIAL NACIONES UNIDAS

TEORIA DEL MOVIMIENTO DEL AGUA SUBTERRANEA

Por

M. King Hubbert

SAN JUAN

Argentina-1967

TEORIA DEL MOVIMIENTO DEL AGUA SUBTERRANEA

por

M. KING HUBBERT

Traducción

Arturo R. Thomann

Revisado por

Dr. Alejandro F. Bordas y Dr. Zane Spiegel

PLAN AGUA SUBTERRANEA

Consejo Federal de Inversiones

Fondo Especial de Naciones Unidas

SAN JUAN, ARGENTINA

Editado con autorización del autor y de "The University of Chicago Press" que publicó el original en inglés en el Volumen XLVIII, Número 8 (Noviembre - Diciembre de 1940) de su revista "The Journal of Geology".

I N D I C E

Prólogo	
Resumen	Pág. 1
1) Introducción	Pág. 2
2) El experimento de Darcy	Pág. 3
3) El significado físico de la Ley de Darcy	Pág. 9
4) Análisis del parámetro K	Pág. 20
5) Ambito de validez de la Ley de Darcy	Pág. 40
6) La Ley de Darcy para gases	Pág. 43
7) Flujo a través de medios Extensivos	Pág. 47
8) Aplicación al flujo de fluidos	Pág. 52
9) Relación entre el campo potencial y el campo de flujo	Pág. 66
10) Refracción de líneas de flujo a través de límites entre medios distintos	Pág. 69
11) Flujo desde punto-fuente y línea-fuente	Pág. 72
12) Los límites entre fluidos no homogéneos	Pág. 84
13) Inclinación de la superficie de contacto ...	Pág. 91
14) La elevación de la superficie de contacto fluida	Pág. 96
15) Caso de tres fluidos	Pág. 99
16) Flujos a través de una superficie de contacto	Pág. 104

///

///

17) Refracción de una superficie de contacto de fluidos a través de un límite plano entre medios de diferente permeabilidad	Pág.	105
18) Aplicación a Aguas Subterráneas	Pág.	115
19) El efecto de capilaridad	Pág.	117
20) Influencia de la capilaridad sobre una superficie de contacto de dos fluidos	Pág.	123
21) El nivel freático	Pág.	131
22) El efecto de la temperatura y de la presión sobre las propiedades de los fluidos	Pág.	135
23) Campo de fuerza rotacional	Pág.	139
24) Comparación de la presente teoría con métodos empleados por otros	Pág.	140
25) Potencial de velocidad	Pág.	142
26) La superficie piezométrica	Pág.	149
27) La condición para el agua artesisiana	Pág.	154
28) El problema de la permeabilidad	Pág.	155
29) La Ley de Badon Ghijben y Herzberg	Pág.	167
30) Aplicación a problemas de interés corriente.	Pág.	169
31) Flujo cerca del nivel freático	Pág.	170
32) La hipótesis de Johnson sobre el origen de los cañones submarinos	Pág.	174
33) El canal navegable de Florida	Pág.	178

///

///

34) Conclusión	Pág. 186
35) Discusión por H. Krutter	Pág. B-1
36) Respuesta por M. K. Hubbert	Pág. C-1

P R O L O G O

Esta traducción al español del importante trabajo del Dr. M. King Hubbert, publicado en The Journal of Geology (1940) titulado "The Theory of ground water motion" fue hecha por el señor Arturo R. Thomann en el mes de Abril de 1965., durante la fase inicial del desarrollo del PLAN "INVESTIGACION DE LAS AGUAS SUBTERRANEAS EN EL NOROESTE ARGENTINO", que el Fondo Especial de Naciones Unidas y el Consejo Federal de Inversiones acordaron realizar para Argentina.

La revisión fue hecha por los Drs. Zane Spiegel y Alejandro F. Bordas y es publicada con permiso del editor y del autor, para uso de este Plan Operativo y para propender a la difusión de los conceptos más importantes para resolver los problemas del agua subterránea en los países de habla española, en donde el desarrollo del agua se esta llevando a cabo rápidamente.

Cuando se publicó este trabajo en su idioma original, la mayoría de los estudios sobre agua subterránea eran hechos principalmente por geólogos con escasos conocimientos matemáticos, o por ingenieros civiles adiestrados en métodos de análisis matemáticos apropiados para infiltraciones de diques pero con escasos conocimientos geológicos y limitados conocimientos del agua subterránea.

De los pocos adelantos de importancia que se realizaron en hidrología del "agua subterránea cuantitativa" antes del trabajo de Hubbert, sobresalió el realizado por C. V. Theis (1935), que se utilizó en operaciones prácticas pero los hidrogeólogos que lo emplearon no tenían una comprensión básica de los principios físico-matemáticos del movimiento del agua subterránea- Interpretan mal su terminología usando inapropiadamente o incorrectamente

///

///

muchos términos con el agravante de que se han afianzado firmemente por el uso en la literatura del agua subterránea.

El trabajo de Hubbert, que fue virtualmente ignorado por los hidrogeólogos durante mucho tiempo, contiene la mayoría de los conceptos básicos y los términos técnicos necesarios para conocer el agua subterránea cuantitativamente; el autor da énfasis a estas ideas y términos, y los aplica de una manera tan lógica, que un lector paciente los comprenderá aún cuando le falte una buena base de conocimientos matemáticos.-

LA TEORÍA DEL MOVIMIENTO DE LA AGUA SUBTERRÁNEA

M. King Hubbert

RESUMEN

Los trabajos analíticos existentes sobre el flujo del agua subterránea han sido en su mayoría fundados sobre el concepto, tomado del flujo de fluidos ideales sin fricción de la hidrodinámica clásica, de que el movimiento de las aguas subterráneas es derivable de un potencial de velocidad. Otro punto de vista muy sostenido es el de que la presión es tal función, con el flujo del fluido en la dirección negativa de la gradiente de presión. En el presente trabajo se muestra que una teoría analítica mas libre de excepciones resulta si se emplea un potencial cuyo valor en un punto dado es definido como igual al trabajo requerido para transformar una unidad de masa de fluido de un estado normal arbitrario al estado en dicho punto. Designando esta función con ϕ , se muestra que la ecuación diferencial del flujo del fluido en un medio isotrópico es dada por $q = -\sigma \text{ grad } \phi$, donde "q" es el vector de flujo cuya magnitud es igual al volumen de fluido que atraviesa una unidad de area normal a la dirección del flujo en unidad de tiempo, y σ un parámetro específico de conductividad, dependiendo de las propiedades del fluido y del medio. Esta es una expresión de la Ley de Darcy y es tanto física como matemáticamente, análoga a la Ley de Ohm en electricidad y conduce a las mismas deducciones en situaciones análogas.

Se muestra que $\sigma = k\rho/\eta$, donde k es el parámetro (o coeficiente) de permeabilidad que depende de las propiedades geométricas del medio solamente y ρ y η son la densidad y viscosidad, respectivamente, del fluido.

El resto del estudio está destinado a deducir las consecuencias de la Ley de Darcy tal como se expresó, con particular interés respecto a los problemas prácticos de la hidrología de las aguas subterráneas.

1 INTRODUCCION.

Desde los experimentos precursoros de Darcy (1) sobre el flujo de agua a través de arenas filtrantes, ha aparecido una sucesión de importantes tratados analíticos. En ellos el flujo del agua subterránea se ha discutido como un problema en el campo de la teoría de la física matemática. Sobresale entre estos tratados analíticos el ya casi clásico estudio de Slichter (2) y los tratados recientes de Dachler (3) y de Muskat (4).

Mientras la importancia de éstos y otros trabajos similares no puede ser sobrestimada, todos ellos han fallado en uno o más puntos con respecto al objetivo de establecer una teoría sobre el movimiento de aguas subterráneas que esté libre de contradicciones internas y a la vez de conformidad con todos los principios fundamentales de la física que el movimiento de aguas subterráneas debe satisfacer. En estos trabajos se han tomado amplias precauciones para no violar el principio de conservación de la materia, pero se ha tenido mucho menos cuidado con respecto a las igualmente inviolables primera y segunda ley de termodinámica.

En el presente estudio se hará una tentativa para establecer la teoría del movimiento de aguas subterráneas sobre una base tal que las consecuencias deducidas estén en la más completa conformidad con los principios de la física que hasta ahora. Al hacer esto todo el tema deberá ser re-examinado desde sus primeros principios porque las contradicciones que se quieren evitar son inherentes a los conceptos fundamentales empleados. Los resultados que alcanzaremos, en su mayor parte, serán semejantes a los de los trabajos ya existentes, pero surgirán diferencias significativas donde no es permisible despreciar las relaciones de energía.

El presente trabajo será, dentro de lo posible, lógicamente completo; sin embargo el lector podrá ocasionalmente sentir la necesidad de una mayor ampliación de los principios fundamentales que pueden ser discutidos aquí solo brevemente.

Para tal propósito deberá consultar las obras comunes sobre teoría del potencial, termodinámica, hidrodinámica, meteorología dinámica, conducción de calor y electrodinámica. Aunque existen muchos tratados sobre estos varios temas, entre aquellos que el autor ha empleado, extensamente, se encuentran los siguientes: "Theory of Heat" y "Thermodynamics", de Planck; "On the Equilibrium of Heterogeneous Substances", de Gibbs, (en "Collected Works"); "Foundation of Potential Theory", de Kellogg; "Vector Analysis", de Joffin; "The Physics of Solids and Fluids", de Wald, Pöschl, y Prandtl; "Hydro- and Aerodynamics" (2 vol.), de Prandtl y Tietjens; "Dynamic Meteorology and Hydrography" (Carnegie Inst. Wash. Pub. 88) (1911), de V. Bjerknes; "Classical Electricity and Magnetism", de Abraham y Becker; "Principles of Electricity", de Page y Adams.

No existe mejor fuente para los fundamentos geológicos de la hidrología de aguas subterráneas que las publicaciones de la Division of Ground Water del United States Geological Survey, particularmente "The Occurrence of Ground Water in the United States with a Discussion of Principles" de Meinzer (U.S. Geol. Surv. Water-Supply Paper 480) (1930). Un tratado más reciente sobre el mismo tema es "Ground Water", de Tolman.

2. EL EXPERIMENTO DE DARCY.

El problema general del movimiento de aguas subterráneas es principalmente el siguiente: supongamos que conocemos la estructura completa (por lo menos estadísticamente) de una región subterránea que se extiende desde la superficie de la tierra hasta alguna profundidad arbitraria, y conocemos también la velocidad volumétrica (el coeficiente de flujo) del agua a través de los límites de esa región en todos los puntos; cuál es la naturaleza del flujo en todos los puntos interiores de la región? Una variación de este problema que se encuentra comúnmente en la práctica consiste en conocer la geometría y el estado del

flujo de una región en el espacio, debiéndose anticipar los cambios que se producirán en el sistema de flujos como consecuencia de alteraciones específicas que se impondrán al sistema.

Expuestos así ampliamente, ambos problemas son aparentemente formidables, y realmente lo son hasta que desarrollamos ciertas relaciones necesarias que nos permitirán tratarlos. Para adquirir las herramientas analíticas necesarias para ser empleadas en problemas más generales, elegimos arbitrariamente un sistema de flujos simple y lo investigamos exhaustivamente. Habiendo hecho ésto, volveremos entonces con los conocimientos así obtenidos a problemas de naturaleza más compleja.

El movimiento de aguas subterráneas difiere de los problemas más familiares del flujo de fluidos en que en este caso el flujo, en lugar de ocurrir en cuencas abiertas o en canales, tiene lugar a través de una red intrincadamente ramificada de espacios abiertos (intersticios) interpenetrando un armazón esquelético sólido. Hay, por lo tanto, dos elementos distintos y esenciales para cada uno de tales problemas de flujo: las propiedades del fluido, y las propiedades de la armazón sólida, o medio. Las propiedades de flujo del fluido están suficiente determinadas para la mayoría de los propósitos por su viscosidad, η , y su densidad, ρ .

Las dos propiedades más importantes del medio son su porosidad y su permeabilidad. La porosidad, ϵ , puede ser definida como el índice de espacio libre, o vacíos, con respecto al volumen total. En rocas ésto varía desde cero a más del 50 por ciento. La permeabilidad del medio se relaciona con la facilidad con que los fluidos fluyen a través de él. Por ahora solamente es posible una definición cualitativa. De dos medios a través de los cuales se hace fluir un mismo fluido bajo idénticas condiciones, podemos decir que tiene mayor permeabilidad el medio a cuyo través el flujo es más rápido. Puede llamarse isotrópico a un medio, con respecto a la permeabilidad, si

es igualmente permeable al flujo en todas las direcciones.

Ahora, para iniciar nuestro analisis, elegimos una región de espacio ocupada por un medio que es homogéneo e isotrópico con respecto a la porosidad y a la permeabilidad. Suponemos, además, que la armazón sólida es insoluble y químicamente inerte con respecto al fluido que la atraviesa, e idealmente rígida. Para la región a investigar elegimos un volumen cuya forma es la de un cilindro circular recto, de area seccional " A " y longitud " l ", en el que tanto " A " como " l " son cifras grandes comparadas con las pequeñas irregularidades y el tamaño granular del medio. Se requiere que el flujo a través del volumen sea rectilíneo y en dirección paralela al eje del cilindro.

Estas condiciones pueden obtenerse aproximadamente en forma experimental si construimos el aparato que indica la Figura 1. Este consiste de un cilindro metálico grande montado de tal forma que puede girar sobre un eje horizontal perpendicular a su propio eje. La sección central del cilindro entre dos mallas se llena con arena u otro material granular de grado uniforme adecuado. Los extremos del cilindro son cerrados, pero cerca de cada extremo existen conexiones para entrada y salida. En los puntos " P_1 " y " P_2 " sobre la misma línea axial y separados entre sí por una distancia " l " existen dos aberturas manométricas con salida desde la sección central llenada con el material permeable. Por medio de tubos flexibles de goma estas aberturas están conectadas con manómetros abiertos de instalación fija.

Elegimos un nivel básico de elevación, sobre el cual las elevaciones de los puntos " P_1 " y " P_2 " son " z_1 " y " z_2 " respectivamente. Dejamos que el angulo de inclinación del cilindro grande sea " α " de manera que " α " sea cero cuando el cilindro esté en posición vertical con " P_2 " arriba de " P_1 ".

Se hace fluir agua a través del sistema a una velocidad volumétrica de " Q " unidades de volumen por unidad de tiempo. El agua se eleva a alturas " h_1 " y " h_2 " sobre el nivel básico de elevación en los dos tubos

manométricos que terminan, respectivamente, en "P₁" y "P₂".

Ahora deseamos investigar las relaciones entre las distintas variables del sistema. Convenimos en que la velocidad volumétrica "Q" es positiva cuando el flujo está dirigido de "P₁" a "P₂", y negativa cuando lo está de "P₂" a "P₁". Variando el valor de "Q" establecemos las siguientes relaciones: Cuando

$$Q = 0, \quad h_2 = h_1 \quad \text{ó} \quad h_2 - h_1 = 0,$$

$$Q > 0, \quad h_2 < h_1 \quad \text{ó} \quad h_2 - h_1 < 0,$$

$$Q < 0, \quad h_2 > h_1 \quad \text{ó} \quad h_2 - h_1 > 0.$$

También observamos que esta relación es una de proporcionalidad y que

$$Q \propto - (h_2 - h_1).$$

A continuación investigamos el efecto de cambiar el ángulo de inclinación α . Dejando que "Q" permanezca constante, variamos la inclinación del sistema de manera que tenga todos los valores posibles desde cero a 180°, y descubrimos que los resultados expresados por las ecuaciones (1) y (2) no son influenciados en ningún sentido por el valor de α , siendo exactamente los mismos ya sea que el sistema esté vertical hacia arriba, inclinado, horizontal o vertical hacia abajo.

Otras dos variables importantes del sistema, cuyos efectos requieren investigación son el área de la sección transversal "A" y la longitud "l". Esto puede ser hecho reconstruyendo el aparato y variando primero "A" y luego "l"; pero hacerlo es poco necesario ya que las relaciones están implícitas en el experimento ya descrito.

Consideremos en primer lugar la variación de "A". Como la dirección del flujo es axial, no se producirá ningún cambio si insertamos una división axial delgada que divida el cilindro en dos mitades, cada una con sección "A/2" y con caudal "Q/2" en cada mitad. En este caso las lecturas manométricas, que permanecen invariables, pertenecen a sólo una mitad del sistema. Otras particiones adicionales nos darán una serie de tubos iguales paralelos, cada uno conduciendo agua en una cantidad

Q/n^2 , sin ningún cambio en las lecturas manométricas, a pesar de que los niveles manométricos pertenecen a un caudal " Q/n " en un tubo de sección " A/n ". De esto se desprende claramente que la reducción de la sección transversal del sistema de flujo no afecta las lecturas manométricas siempre que la descarga a través de esa superficie sea también variada en igual grado. Esto nos lleva a la conclusión de que la velocidad " q " es la que debe permanecer constante. Si las lecturas manométricas permanecen constantes, la carga total aplicada por la superficie de la sección transversal es obviamente igual a la descarga por unidad de superficie o a la velocidad específica " q ". Consecuentemente,

$$\frac{Q}{A} = q \propto (h_2 - h_1) \quad (1)$$

Por lo tanto, para un valor dado de lecturas manométricas,

$$Q = qA, \quad (2)$$

donde la descarga específica, " q ", es la constante de proporcionalidad.

En una manera similar investigamos el efecto de variar la longitud " l " entre las bases de los dos tubos manométricos. La diferencia de alturas " $h_2 - h_1$ " es la reacción a la descarga " q " a través de la longitud " l ". Como el flujo es uniforme a través de toda sección transversal del sistema, entonces para una longitud " dl " debe corresponder una disminución de " h ", de " dh ", tal que

$$\frac{dh}{dl} = \frac{h_2 - h_1}{l}, \quad (3)$$

y estas cantidades deberán ser proporcionales a " q ". O, si " $(h_2 - h_1)$ " es mantenida constante,

$$Q \propto \frac{1}{l} \quad (4)$$

Por lo tanto, si combinamos los resultados de las ecuaciones (2) - (4) en una sola expresión, obtenemos

$$Q = -KA \cdot \frac{h_2 - h_1}{l} \quad (5)$$

ó, empleando la velocidad específica q y la expresión diferencial " dh/dl ",

$$q = \frac{Q}{A} = -K \cdot \frac{dh}{dl}, \quad (8)$$

donde "K" es una constante de proporcionalidad.

Con la excepción de la variación del ángulo de inclinación, α , ó que, como hemos visto, no produce ningún efecto, el experimento recién descrito es esencialmente el llevado a cabo originalmente por Henry Darcy, cuyos resultados están mejor expresados en sus propias palabras:

"Ainsi, en appelant e l'épaisseur de la couche de sable, P la pression atmosphérique, h la hauteur de l'eau sur cette couche, on aura $P + h$ pour la pression à laquelle sera soumise la base supérieure; saient, de plus, $P \pm h_0$ la pression supportée par la surface inférieure, ~~$\frac{h_0}{c}$~~ coefficient dépendant de la perméabilité de la couche, q le volume débité, on a

$$q = K \frac{S}{c} [h + e \pm h_0]$$

que se réduit à

$$q = K \frac{S}{c} [h + e], \quad \text{quand} \quad \underline{h_0 = 0}$$

"au lorsque la pression sous le filtre est égale à la pression atmosphérique."

Darcy explica en otro lugar que "s" es el área de la sección transversal. A pesar de que el lenguaje empleado es necesariamente algo arcaico según las normas actuales, parece claro que su nivel básico de elevación desde el cual mide las alturas manométricas es la base inferior de su filtro de arena. Luego " $h + e$ " es la altura del manómetro superior, y " h_0 " la del inferior, siendo ésta positiva ó negativa según haya o no empleado un vacío. Resulta claro, por lo tanto, que los resultados anunciados por Darcy están enteramente de acuerdo con los expresados por las ecuaciones (7) y (8) - una relación que apropiadamente ha llegado a ser conocida como la "Ley de Darcy".

Darcy también notó, significativamente, que la relación perdía su

validez para velocidades de fluidos superiores a 10-11 cm/seg.

5. EL SIGNIFICADO FISICO DE LA LEY DE DARCY.

Las relaciones incorporadas en la ecuación (8) forman la base necesaria sobre la cual debe descansar cualquier teoría analítica sobre el movimiento de aguas subterráneas; pero el método para obtener esta ecuación ha sido empírico, y, expresado en esta forma primitiva, la ecuación es de escasa utilidad porque expresa solamente lo que ya hemos aprendido y no nos dá ninguna visión interior del mecanismo mas profundo del flujo de fluidos.

Qué determina la dirección del flujo de fluidos en primer lugar? ¿Cuál sería el efecto si cambiásemos la arena fina por otra de grano mas grueso? ¿Cómo se alteraría la velocidad volumétrica si modificásemos la viscosidad ó la densidad del fluido? Estas y otras similares son preguntas que la ecuación (8) no contesta; sin embargo son preguntas cuyas respuestas es sumamente importante conocer.

Consideremos primeramente la cuestión de qué determina la dirección del movimiento del fluido, es decir, si el flujo en la Figura 1 debe ser dirigido de "P₁" a "P₂", ó de "P₂" a "P₁". Obviamente no podemos decir que el factor determinante es la elevación, porque, como ya hemos visto, si el flujo es inicialmente desde una altura superior a una menor, una inversión del sistema cambia el flujo desde una altura inferior a una mayor sin afectar en grado mínimo su índice ni las lecturas manométricas.

Si no es la elevación, puede ser la presión del fluido el factor determinante del flujo, con el flujo siempre dirigido desde regiones donde la presión es mayor hacia aquellas en las que es menor. En realidad, la gran mayoría de los que han escrito sobre este tema han dicho que es así, y muchos han empleado ecuaciones de la forma

$$q = -K' \cdot \frac{dp}{dl} \quad (9)$$

como una expresión de la Ley de Darcy, presumiblemente bajo la impresión de que las ecuaciones (8) y (9) son afirmaciones físicamente equivalentes.

Si lo expuesto es o no correcto puede determinárselo fácilmente en la siguiente manera: En cualquier punto "P" en un sistema de flujo cuya elevación por encima del nivel básico de elevación es "z", hacemos terminar un tubo manométrico en el cual el líquido se elevará a una altura "h" por encima del nivel básico de elevación. La presión en el punto "P" está determinada por la altura de la columna líquida por encima de "P", y está dada por

$$p = \rho g (h - z) + p_0, \quad (10)$$

donde "p" es la presión, " ρ " la densidad del líquido, "g" la aceleración debida a la gravedad, y " p_0 " la presión de la atmósfera. Ahora, si aplicamos la ecuación (10) a los puntos " P_1 " y " P_2 " de la Figura 1, obtenemos

$$p_1 = \rho g (h_1 - z_1) + p_0, \quad (11)$$

$$p_2 = \rho g (h_2 - z_2) + p_0,$$

y la diferencia entre las presiones en los dos puntos es

$$p_2 - p_1 = \rho g (h_2 - h_1) - \rho g (z_2 - z_1). \quad (12)$$

Ahora ya sabemos que como " $(h_2 - h_1) \rightarrow 0$ ", " $q \rightarrow 0$ "; pero en ese caso " p_1 " es menor que " p_2 " por la cantidad " $\rho g (z_2 - z_1)$ ", lo que nos dá un caso en el que el flujo es cero cuando una de las dos presiones es mayor que la otra. Después, supongamos que hacemos a " h_2 " ligeramente mayor que a " h_1 ", lo que corresponderá al flujo desde " P_2 " hacia " P_1 ", pero no lo suficientemente mayor como para que " $(h_2 - h_1)$ " sea igual a " $(z_2 - z_1)$ ". En este caso la presión " p_2 " será todavía menor que " p_1 ", y tendremos flujo desde una región de presión inferior hacia otra de presión mayor. Si después invertimos el sistema por rotación hasta 180° sobre un eje horizontal, la presión en " P_2 " pasará a ser

mayor que la presión en " P_1 " sin que el índice de flujo ni la lectura manométrica cambien. Consecuentemente, debemos concluir que un líquido se puede hacer que fluya con igual facilidad desde una región de mayor presión hacia otra de menor presión, o desde una región de menor presión hacia otra de presión mayor, bastante arbitrariamente.

Para investigar la ecuación (9) solamente necesitamos expresar la ecuación (12) en forma diferencial:

$$\frac{dp}{dl} = \rho g \cdot \frac{dh}{dl} - \rho g \cdot \frac{dz}{dl} \quad (13)$$

Pero

$$\frac{dz}{dl} = \cos a, \quad (14)$$

así que cuando insertamos ésto en la ecuación (13) obtenemos

$$\frac{dp}{dl} = \rho g \cdot \frac{dh}{dl} - \rho g \cos a. \quad (15)$$

Cuando ésto es substituído en la ecuación (9), resulta

$$q = -K' \rho g \left(\frac{dh}{dl} - \cos a \right), \quad (16)$$

lo que manifiestamente no es equivalente a la ecuación (8) bajo ninguna condición excepto cuando el segundo término, el de $\cos. "a"$, es negligible comparado con el primero. Esto es cierto solamente cuando $\cos. "a"$ es aproximadamente cero, correspondiendo a flujo casi horizontal, o cuando " dh/dl " es muy grande comparado con la unidad, que es el valor máximo de $\cos. "a"$.

En el experimento de la Figura 1, y en el movimiento de agua subterránea en general, la dirección del flujo puede tener cualquier inclinación desde vertical hasta horizontal, y entonces la suposición de $\cos "a" = 0$ no es sostenible. Aún más, " dh/dl " es por lo general mucho menor que la unidad, el valor máximo de $\cos. "a"$. En consecuencia, en problemas de flujo de aguas subterráneas, la ecuación (9) no solamente no equivale a la Ley de Darcy, como se la expresa en la ecuación (8), pero no es siquiera una aproximación válida a dicha Ley.

Consecuentemente, el empleo de la ecuación (9) o cualquier afirmación equivalente en la que el índice del flujo sea supuestamente proporcional a la gradiente de presión, cuando se trata de problemas de aguas subterráneas, debe ser descartado en razón de ser físicamente erróneo.

Si tratar el flujo de gases, por otra parte, " dh/dl ", ó su equivalente, puede ser grande, comparado con $\cos. "a"$, en cuyo caso el empleo de la ecuación (9) se convierte en una aproximación aceptable.

Qué, entonces, determina la dirección del flujo? Lo que todavía buscamos es alguna cantidad física, mensurable en todos los puntos de un sistema de flujo, cuyas propiedades sean tales que el flujo ocurra desde regiones en las cuales la cantidad tiene valores mayores hacia otras en las que los tiene menores, irrespectivamente de la dirección en el espacio. Lo que hemos demostrado hasta ahora es que ni la elevación ni la presión constituyen tal cantidad.

Formalmente, la altura manométrica " h " satisface esta condición enteramente, pero adoptarla empíricamente sin más investigación sería como leer la longitud de la columna de mercurio en un termómetro sin saber que la temperatura era la cantidad física indicada. La cantidad que buscamos, por lo tanto, es evidentemente la cantidad física cuya magnitud es indicada por la altura " h " del líquido en el tubo manométrico, medida desde un nivel de comparación uniforme.

La pauta de esta cantidad será encontrada si dirigimos nuestra atención momentáneamente a un experimento aparentemente irrelevante. Supongamos que tomamos un péndulo simple, comenzamos a hacerlo balancear con mucha amplitud, y después lo dejamos enteramente libre de perturbaciones exteriores. Registramos su movimiento por medio de exposiciones de tiempo tomadas periódicamente, siendo el tiempo de cada exposición igual al período del péndulo. Mezclamos las fotografías y pedimos a una segunda persona que las arregle en orden cronológico. Esto está ilustrado por la Figura 2, donde "A", "B", "C", "D" y "E" son impresiones elegidas al azar, y el problema es determinar el orden cronológico en que las exposiciones fueron hechas.

cronológico en que las exposiciones fueron hechas.

Podríamos decir que ese orden es "D", "B", "E", "A" y "C", porque este es el orden decreciente de amplitud de oscilación, y nuestra experiencia nos dice que un péndulo libre siempre oscila con amplitud decreciente - nunca el caso inverso.

Tenemos, por lo tanto, un proceso experimental que solamente vá en una única dirección, y ésta es la característica unidireccional que queremos considerar. Esto lo podemos hacer mejor tomando en cuenta las transformaciones de energía del proceso. Para comenzar las oscilaciones del péndulo en primer lugar, tuvimos que darle una provisión inicial de energía potencial. Al oscilar en uno y otro sentido, hubieron transformaciones periódicas de energía potencial en energía cinética, y de ésta otra vez en energía potencial, la suma de ambas comprendiendo la energía mecánica del sistema que permanecería constante para una amplitud de oscilación también constante. Pero hemos notado ya que la amplitud disminuía constantemente; en consecuencia, debe haber habido una continua disipación de la energía mecánica originalmente suministrada al sistema. También, el equilibrio último corresponde a un estado de descanso con el péndulo en su posición más baja posible, es decir, con la energía cinética del sistema igual a cero, y la energía potencial al mínimo posible compatible con los requerimientos del sistema.

Sabemos, además, que la disminución progresiva en la amplitud de la oscilación es debida a resistencias de fricción; y, por el principio de conservación de la energía, sabemos que la energía mecánica perdida por el sistema reaparece como calor en la temperatura de los alrededores. Ahora, si pudiésemos transformar esta energía térmica nuevamente en energía mecánica sin otros cambios permanentes, podríamos reactivar el péndulo, permitiéndole usar una y otra vez la misma energía lo que sería una forma de movimiento perpetuo.

Nuestra experiencia puramente negativa en este asunto nos conduce a la conclusión de que un proceso tal es imposible, y una generalización de este hecho para ser aplicado a todas las formas de procesos nos da la Segunda Ley de Termodinámica que establece, en esencia, que toda transformación material que implique fricción, o su equivalente, es unidireccional e irreversible en su carácter, significando que, una vez que el proceso ha tenido lugar, por absolutamente ningún método puede ser deshecho. En otras palabras, si tenemos alguna configuración inicial de materia en un sistema aislado, y esta configuración sufre un cambio espontáneo acompañado de fricción, es definitivamente imposible restituir la materia contenida dentro de dicho sistema a su configuración externa al sistema.

Este es el método de razonamiento que queremos emplear ahora con respecto a nuestro problema de flujo de fluidos. El flujo de un fluido es un proceso mecánico; y, cuando el fluido tiene viscosidad y el flujo se produce a través de pasajes reducidos de rocas porosas, la fricción no solamente está presente sino que es una de las influencias dominantes en el proceso. Consecuentemente, si tal flujo llega a ocurrir, debe estar acompañado por una transformación irreversible de energía mecánica en térmica a través del mecanismo de fricción de fluidos. Más aún, como el péndulo, el equilibrio final debe corresponder a una configuración en la cual la energía cinética sea cero; y la energía potencial, la mínima posible compatible con las exigencias del sistema. Por lo tanto, para tener flujo, debe haber existido un suministro inicial de energía mecánica, y los cambios que ocurran en lo sucesivo deberán siempre ser en la dirección de una reducción por disipación de esta energía mecánica en calor.

Hasta ahora esto da la dirección generalizada del proceso pero no la dirección geométrica del flujo en el espacio. Esta última es obtenida, de todos modos, cuando consideramos que la energía mecánica del sistema está asociada con los elementos de su masa ó volumen, y que

éstos ocupan posiciones particulares en el espacio.

La dirección del flujo en el espacio debe ser por lo tanto desde regiones en las cuales la energía mecánica por unidad de masa es alta y hacia regiones en las cuales es más baja.

No debe inferirse que la energía que posee un sistema como consecuencia del hecho de que un elemento de masa ocupa una posición dada reside sobre o dentro del elemento de masa. Por ejemplo, la energía potencial " $U = gz$ " de una unidad de masa debido al campo gravitacional de la tierra es una energía de la unidad de masa y la tierra considerada un sistema único; sin embargo podemos referir sin ambigüedad esta energía a la unidad de masa en una posición especificada. Lo mismo es cierto con respecto al sistema de fluidos que estamos tratando.

La energía mecánica del fluido por unidad de masa es, por lo tanto, evidentemente, la cantidad física que nos propusimos encontrar; y en adelante nos referiremos a ella como el "potencial" del fluido en cuestión, habiendo tantos potenciales diferentes como distintos fluidos por tratar.

Nuestro problema se reduce ahora a la determinación del potencial del fluido, o energía mecánica por unidad de masa, del fluido dado en cualquier punto arbitrario en el espacio. Para obtener esto notamos primeramente que la energía es una cantidad relativa y es mesurable por la cantidad de trabajo requerido para efectuar una transformación dada cualquiera desde algún estado inicial arbitrario a un estado final especificado. El potencial de un fluido en un punto especificado es, por lo tanto, el trabajo requerido para transformar una unidad de masa del fluido desde un estado normal arbitrariamente elegido al estado en el punto bajo consideración. Para el estado normal es conveniente emplear una elevación cero, una presión de 1 atmósfera, y una velocidad de cero (relativa a la superficie de la tierra). Hagamos que el fluido en su estado final en el punto "P" esté caracterizado por una elevación

"z", una presión "p", y una velocidad "v". También podemos llamar " V_0 " al volumen por unidad de masa, o volumen específico del fluido en su estado normal, y "V" al del estado final. Las densidades respectivas pueden ser " ρ_0 " y " ρ ". También podemos notar que la densidad es el recíproco del volumen específico: " $V = 1/\rho$ ".

Queremos averiguar el trabajo requerido para transformar una unidad de masa del fluido del estado inicial al estado final, y para hacerlo imaginamos una bomba construida de acuerdo a las indicaciones de la Figura 3. Esta consiste de un cilindro con pistón libre de fricción, a cuyo frente está la cámara con el fluido, y atrás un vacío perfecto. Existen válvulas de entrada y salida. Entonces imaginamos la transformación a ser efectuada por los siguientes pasos sucesivos:

1. Bajo condiciones normales retiramos lentamente el pistón y cargamos el cilindro con una unidad de masa del fluido. El trabajo efectuado por el pistón sobre el fluido es

$$w_1 = -p_0 V_0. \quad (17)$$

2. Seguidamente levantamos la bomba con su contenido de fluido al punto "P" de elevación "z". El trabajo utilizado para esto es

$$w_2 = +gz + m_p gz, \quad (18)$$

donde "gz" es el trabajo requerido para levantar la unidad de masa del fluido, y " $m_p gz$ " el requerido para levantar la bomba sola.

3. El contenido del cilindro es inyectado en el sistema en el punto "P". El trabajo requerido para esto es

$$w_3 = + \int_V^{V_0} p. dV + pV. \quad (19)$$

El primer término a la derecha de la ecuación (19) es el trabajo de compresión del fluido necesario para elevar su presión desde " p_0 " a "p" antes de que pueda ser inyectado. El término "pV" es el trabajo de inyección contra la presión "p".

4. El fluido es acelerado desde una velocidad de cero hasta la

de "v", requiriendo ésto una cantidad de trabajo

$$w_4 = + \frac{v^2}{2} . \quad (20)$$

5. El cilindro vuelve a su posición inicial de elevación cero, completando así el ciclo. Esto requiere un trabajo de

$$w_5 = -m_p gz . \quad (21)$$

La suma de estas cantidades separadas de trabajo es el potencial " Φ " del fluido en el punto "P". Efectuando la suma y cancelando los términos repetidos con signos opuestos obtenemos

$$\Phi = gz - p_0 V_0 + \int_V^{V_0} p dV + pV + \frac{v^2}{2} . \quad (22)$$

En esta ecuación, los términos primero y último del lado derecho son la energía potencial gravitacional y la energía cinética, respectivamente. La significación de los otros tres términos es visualizada mejor por medio del "diagrama indicador" de la Figura 4, en el cual la presión en el cilindro está trazada contra el desplazamiento del pistón para fluidos comprimibles e incompresibles. Si el fluido es incompresible, una condición aproximadamente satisfecha por los líquidos dentro de límites de presión comunes,

$$\int p \cdot dV = 0 \quad \text{y} \quad V = V_0 . \quad (23)$$

En este caso el trabajo presión-volumen se reduce a " $(p-p_0)V$ ", y la ecuación (22) se simplifica a

$$\Phi = gz + (p - p_0) V + \frac{v^2}{2} : \quad (24)$$

Por una transformación matemática podemos convertir la ecuación (22) en otra cuya significancia física puede no ser inmediatamente aparente pero que resultará de gran utilidad después. Para efectuar ésto utilizamos el hecho de que

$$\begin{aligned} d(pV) &= p \cdot dV + V \cdot dp, \\ \int p \cdot dV &= \int (pV) - \int V \cdot dp. \end{aligned} \quad (25)$$

Entonces, como una integral definida, ésto se convierte en

$$\int_V^{V_0} p \cdot dV = \int_{pV}^{p_0 V_0} d(pV) - \int_p^{p_0} V \cdot dp = p_0 V_0 - pV + \int_{p_0}^p V \cdot dp. \quad (26)$$

Sustituyendo este valor por " $\int_V^{V_0} p dV$ " en la ecuación (22) transformamos esa ecuación en

$$\phi = gz + \int_{p_0}^p V \cdot dp + \frac{v^2}{2}, \quad (27)$$

la que, cuando sustituimos " $\frac{1}{\rho}$ " por " V " se transforma en

$$\phi = gz + \frac{p}{\rho} \frac{dp}{p} + \frac{v^2}{2}. \quad (28)$$

Una interpretación gráfica de la ecuación (26) es fácilmente obtenible al notar que la superficie contenida por el diagrama indicador de la Figura 4, "a" es igual al trabajo realizado por la bomba por ciclo y que éste está dado por

$$\int_{p_0}^p V \cdot dp \quad \text{ó por} \quad \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}.$$

La ecuación (28) es una expresión del potencial del fluido en un punto "P" en la forma más general que necesitaremos. Sin embargo, para poder definir el valor de " ϕ " de tal forma de que sea único, es necesario estipular que la densidad del fluido debe ser solamente una función de la presión, pues de otra forma el valor de " $\int_{p_0}^p V dp$ " será indeterminado.

Para los líquidos esta condición queda automáticamente cumplida hasta el punto en que sus densidades pueden ser consideradas constantes. Para los gases queda satisfecha por condiciones isotermales, lo que para muchos problemas es una aproximación satisfactoria, y también por condiciones adiabáticas, que son de gran importancia en meteorología.

Si el fluido fluye sin fricción, como es aproximadamente el caso para líquidos de pequeña viscosidad y gases, cuando se mueven en

grandes espacios abiertos, entonces cada elemento de masa retiene su energía mecánica sin reducciones, y a lo largo de cualquier trayectoria dada de flujo de fluidos, cada unidad de masa tendrá la misma energía y potencial. Para ese caso

$$\phi = gz + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{constante}, \quad (29)$$

lo que es una generalización de un celebrado teorema enunciado en 1738 por Daniel Bernoulli relacionando la elevación, la presión y la velocidad a lo largo de una línea de flujo dada de un fluido en flujo sin fricción.

Si el flujo no está libre de fricción, como ocurre generalmente con aguas subterráneas y flujos de fluidos similares, entonces la energía mecánica inicialmente poseída por un elemento del fluido debe disiparse continuamente al recorrer este elemento su trayectoria de flujo. Consecuentemente, el valor de " ϕ " en este ejemplo debe decrecer continuamente en la dirección del flujo.

Otra consecuencia de la fricción en el movimiento de aguas subterráneas es la amortiguación de grandes velocidades, alcanzando raramente la velocidad de flujo de aguas subterráneas a 1 cm/seg., siendo comunemente del orden de unos pocos centímetros por día. Para nuestros propósitos podemos en consecuencia desprestigiar el término " $\frac{v^2}{2}$ " de energía cinética por ser insignificante en comparación con los otros términos de la ecuación para el potencial.

Esto simplifica la expresión del potencial y la reduce a

$$\phi = gz + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}, \quad (30)$$

la que, para líquidos, se reduce más aún a

$$\phi = gz + \frac{p - p_0}{\rho}. \quad (31)$$

Ahora, para estar en condiciones de medir " ϕ " en cualquier punto "P" de elevación "z" y presión "p" en un sistema de flujo de líquidos,

supongamos que regresamos a nuestro recurso anterior de terminar en el punto "P" un tubo manométrico dentro del cual el líquido se eleva a la altura "h" por encima del nivel básico de elevación. La presión "p" está indicada por la lectura del manómetro, y la elevación "z" es dada por la ecuación (10). Cuando esto es substituído dentro de la ecuación (31), obtenemos el siguiente resultado, notablemente simple:

$$\phi = gz + \frac{[\rho g(h-z) + p_0] - p_0}{\rho} = gh. \quad (32)$$

De aquí que el potencial del fluido es en realidad la cantidad física oculta que originalmente nos propusimos descubrir, dado que su magnitud es indicada por la altura "h" del manómetro y es numéricamente igual a "h" multiplicada por la aceleración debida a la gravedad.

Con estos antecedentes, volvamos ahora a los resultados del experimento de Darcy expresado empíricamente por la ecuación (8). De la ecuación (32)

$$\frac{dh}{dl} = \frac{1}{g} \cdot \frac{d\phi}{dl}, \quad (33)$$

que, empleando en conjunción con la ecuación (8), dá las dos expresiones alternativas equivalentes de la Ley de Darcy:

$$q = -K \cdot \frac{dh}{dl} = -K \cdot \frac{1}{g} \cdot \frac{d\phi}{dl}. \quad (34)$$

4. ANALISIS DEL PARAMETRO "K".

Nuestra próxima tarea es la de analizar el parámetro "K". En el experimento de la Figura 1 investigamos ciertas variables cuyos efectos están explícitamente expresados en la ecuación (8), pero al efectuar este experimento mantuvimos arbitrariamente constantes todos los factores excepto los que particularmente investigamos.

El experimento, de todos modos, era incompleto en razón de que una cantidad de variables posibles no fueron tomadas en consideración. Cuál, por ejemplo, hubiese sido el efecto de un cambio de la densidad ó de la viscosidad del fluido, del diámetro de la arena, ó de otras posibles

variables del sistema?

Manifiestamente, todas estas otras variables fueron ~~incluidas~~ en la estipulación "permaneciendo constante todo lo demás"; y sus efectos combinados están agrupados en la "constante" de proporcionalidad "K", la que, consecuentemente, no es una constante verdadera pero sí un parámetro variable cuyo valor depende de los valores de las variables que agrupa. Es importante que encontremos estas variables ocultas para poderlas incluir explícitamente en nuestra ecuación de flujo, lo que nos permitirá eliminar totalmente a "K". Para hacer ésto debemos ahondar algo más que hasta ahora en la mecánica del flujo de fluidos.

En lo que continúa, dos puntos de vista diferentes -el microscópico y el macroscópico- distinguidos entre sí por la escala de tamaño adoptada, resultarán útiles. Cuando empleemos el punto de vista microscópico será en lo concerniente a elementos fluidos que son grandes comparados con las irregularidades cinéticas de movimiento molecular pero menores que los pasajes abiertos del medio. Cuando utilicemos el punto de vista macroscópico, los elementos fluidos de que hablaremos serán lo suficientemente grandes como para que las irregularidades del flujo debidas al medio no necesiten ser consideradas, pero solamente la resultante estadística.

Con el objeto de determinar cuáles son los varios factores que influyen el índice de flujo, y la parte que desempeñan, necesitamos saber cuáles son las fuerzas que actúan sobre los elementos fluidos, y de qué dependen. Para determinarlas estipularemos que el flujo a través de la arena en el aparato de la Figura 1 sea mantenido "uniforme", ésto es, no variable con el tiempo, lo que lograremos si mantenemos constante el valor "q" en cualquier cifra arbitrariamente elegida. Entonces adoptamos el punto de vista microscópico para poder examinar el flujo en cierto detalle.

Cuando es visto en esta escala, el flujo consistirá en el pasaje del

fluido a través de una red intrincada, ramificada y tridimensional de intersticios, análogo al flujo bi-dimensional de un río a través de un complejo de pequeñas islas. Si elegimos un punto particular, fijo con respecto al armazón, entonces una partícula de fluido que pase a través de dicho punto seguirá un camino definido o "trayectoria" y toda partícula que pase a través del mismo punto seguirá la misma trayectoria y tomará las mismas velocidades en los puntos correspondientes a lo largo de la trayectoria.

Consecuentemente, a cada punto fijo dentro del sistema de flujo le corresponde una velocidad de flujo particular, tanto en magnitud como en dirección, y a través de cada punto pasa una trayectoria particular. Podemos por lo tanto pensar que el flujo está representado por una familia de trayectorias, de las cuales pasa una a través de cada punto, o por un "campo de vectores de velocidad", con uno terminando en cada punto fijo ocupado por el fluido.

Por añadidura a ésto, podemos tomar un elemento de pequeño volumen alrededor de cualquier punto fijo, también fijo con respecto al armazón. Mientras el fluido fluye continuamente a través de tal elemento, en todo instante el elemento de volumen está ocupado por un elemento particular del fluido. Las fuerzas que actúan sobre este elemento son de dos clases: las que actúan sobre su superficie, o fuerzas "superficiales", y las que actúan sobre la masa dentro del elemento de volumen, o fuerzas "de cuerpo". Si el volumen del elemento es " dV ", entonces " $\rho \cdot dV$ " será su masa, y por las leyes de movimiento de Newton la suma de las fuerzas aplicadas es igual al producto de la masa por su aceleración. Entonces

$$\rho \cdot dV \cdot a = f_a + f_b \quad (35)$$

donde el vector " a " es la aceleración y los vectores " f_a " y " f_b " las fuerzas de superficie y de cuerpo, respectivamente.

Ahora, por el principio de D'Alembert, podemos introducir una

fuerza ficticia

$$f_i = -\rho \cdot dVa, \quad (36)$$

que es la reacción debido a la inercia del cuerpo a las fuerzas aplicadas " f_a " y " f_b ". Entonces tenemos que

$$-f_i = f_a + f_b, \quad \text{ó} \quad f_i + f_a + f_b = 0, \quad (37)$$

lo que nos dice que el elemento de fluido en movimiento está en un estado de equilibrio dinámico bajo estas tres fuerzas, de una manera bastante análoga al más familiar equilibrio estático.

Una clasificación más útil de las fuerzas que actúan sobre el elemento fluido puede obtenerse en base a sus funciones. Sobre esta base podemos hablar de una fuerza "impulsora" " f_d ", una fuerza resistente " f_r " resultante de la resistencia friccional debida a la viscosidad del fluido, y una fuerza reactiva " f_i " debida a la reacción inercial a la aceleración " f_i ". Podemos pensar que " f_d " es la fuerza variable independiente que suministra la energía al elemento fluido. Tanto " f_r " como " f_i " son variables dependientes, que dependen solamente del estado de movimiento del fluido y que equivalen a cero cuando el movimiento del fluido es cero. La fuerza inercial, " f_i ", no contribuye energía al sistema ni tampoco se la resta, mientras " f_r " es la fuerza disipadora de energía.

De esto se desprende claramente que " f_d " y " f_r " son las fuerzas principales desde el punto de vista funcional, mientras que " f_i " tiene el papel de una influencia modificadora sobreimpuesta.

Para poder descubrir los factores que determinan " f_i " y " f_r ", es necesario el punto de vista microscópico. La fuerza impulsora, " f_d ", también puede ser deducida desde este punto de vista, pero hacerlo es innecesariamente complicado.

Investigaremos por lo tanto las fuerzas " f_i " y " f_r ", en acción sobre un elemento microscópico, y extenderemos entonces los resultados

a un volumen macroscópico, por integración, antes de deducir " f_d ". Sin embargo, en una escala microscópica, conociendo " f_i " y " f_r ", y siendo " f_d " la resultante de ambas, " f_d " es singularmente determinada.

Para poder investigar las fuerzas debidas a inercia y a viscosidad, erijamos ejes co-ordenados con el eje "x" paralelo a la dirección del flujo de fluido. El elemento de volumen "dV" tendrá longitudes de lado "dx", "dy" y "dz". Los componentes de la velocidad paralelos a los ejes "x", "y" y "z" serán "u", "v", y "w", respectivamente.

Tomando en primer lugar la fuerza debida a la inercia, descomponemos la fuerza y la aceleración de la cual ésta depende, en componentes paralelas a los ejes separados. Tomando la componente "x",

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}, \quad (38)$$

donde " $\partial u / \partial t$ " representa el cambio de "u" con el tiempo en un punto determinado, " $\partial u / \partial x$ " el cambio de "u" con "x" en un tiempo determinado, y " $\partial x / \partial t$ " el cambio de la co-ordenada "x" con el tiempo, de una partícula determinada, y así para los otros términos. Pero

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= u \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= v = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= w = 0, \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

y, para movimiento uniforme,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (40)$$

Entonces, en este caso especial la ecuación (28) se reduce a

$$f_{ix} = -\rho \cdot dV \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad (41)$$

y la componente de fuerza es

(42)

Expresiones similares se obtienen para las componentes paralelas a cada uno de los otros ejes, pero todo lo que nos interesa es la "forma" de la ecuación (42), así que no necesitamos considerar la cuestión en mayor detalle.

Ahora consideremos la fuerza debida a la viscosidad. Sobre las caras "y" y "z" del elemento de volumen actuarán tensiones transversales. " τ_{yx} " es la tensión transversal paralela al eje "x" sobre la cara "y", cuya normal dirigida hacia afuera va hacia el extremo negativo del eje "y". Sobre la cara opuesta la tensión correspondiente es " $\tau_{yx} + (\partial\tau_{yx}/\partial y)dy$ ". Entonces la fuerza neta paralela al eje "x" producida por estas dos tensiones será

$$f_{yx} = \left(\tau_{yx} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} \cdot dy \right) dx dz - \tau_{yx} \cdot dx dz = + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} \cdot dV. \quad (43)$$

Un estudio completo permitiría obtener términos adicionales, pero nuevamente los mismos serían de la forma del término a mano derecha de la ecuación (43).

Nuestro problema siguiente es relacionar las tensiones transversales que actúan sobre la superficie de un elemento fluido con el estado de su flujo. Por la ley de viscosidad de Newton el índice de corte en un fluido viscoso es proporcional a la intensidad de la tensión de corte (ó transversal) que actúa sobre él. Si " γ_{yx} " es el cambio de un ángulo originalmente recto en el fluido con lados paralelos a los ejes "x" e "y", entonces " $d\gamma_{yx}/dt$ " es el índice de tiempo del corte, y

$$\tau_{yx} = \eta \cdot \frac{d\gamma_{yx}}{dt}, \quad (44)$$

donde la constante de proporcionalidad " η " es la viscosidad del fluido.

Pero

$$d\gamma_{yx} = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) dt - u dt}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dt, \quad (45)$$

de donde obtenemos que

$$\frac{d\gamma_{yx}}{dt} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (46)$$

lo que, al ser substituído en la ecuación (44) da

$$\tau_{yx} = \eta \cdot \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (47)$$

Ahora, si diferenciamos ésto con respecto a "y",

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \eta \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (48)$$

lo que puede entonces ser substituído en la ecuación (43), resultando que

$$f_{r_{yx}} = \eta \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot dV. \quad (49)$$

Lo que tenemos interés en averiguar es la manera en que las fuerzas inerciales y resistivas varían con la descarga específica "q" y con un cambio de escala del medio. Generalizando, supongamos que tenemos dos medios "geométricamente similares", de escalas de distinta longitud, y nacemos que dos fluidos diferentes los atraviesen fluyendo en forma "cinemáticamente similar". La similaridad geométrica requiere que todas

las longitudes correspondientes de los dos sistemas tengan una relación constante

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{d_2}{d_1} \quad (50)$$

donde " d_1 " y " d_2 " son los correspondientes diámetros granulares de los dos sistemas, tomados éstos como longitudes características.

La similaridad cinemática requiere que los dos sistemas de flujo sean réplicas exactas el uno del otro excepto en lo referente a las escalas de longitud y tiempo. Todas las trayectorias deben ser geoméricamente similares, y todas las velocidades correspondientes deben tener direcciones idénticas y magnitudes proporcionales. Como la descarga específica " q " tiene las dimensiones

$$[q] = \left[\frac{\text{Volumé}}{\text{Area} \cdot \text{Time}} \right] = [L^3 \cdot T^{-1}] = [\text{Velocity}], \quad (51)$$

esto representa una velocidad generalizada. Consecuentemente, en flujos cinemáticamente similares todas las velocidades correspondientes deben tener entre sí la relación

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{q_2}{q_1}. \quad (52)$$

Finalmente, como las fuerzas actúan en todos los puntos sobre un fluido en movimiento, para que dos flujos sean cinemáticamente similares, es necesario que todas las fuerzas correspondientes de los dos sistemas sean similares, es decir, que tengan idénticas direcciones y magnitudes proporcionales:

$$\frac{f_{i2}}{f_{i1}} = \frac{f_{r2}}{f_{r1}} = \frac{f_{d2}}{f_{d1}} \quad (53)$$

Esto también requiere que los triángulos de equilibrio de fuerzas correspondientes de los dos sistemas sean similares, para que

$$f_{i1} : f_{r1} : f_{d1} :: f_{i2} : f_{r2} : f_{d2} \quad (54)$$

ó

$$\frac{f_{i1}}{f_{r1}} = \frac{f_{i2}}{f_{r2}} \quad (55)$$

La manera en que los términos de la ecuación (55) dependen de la velocidad y las escalas de longitud, es dada por las ecuaciones (42) y (49). Para cualquiera de los dos sistemas de flujos

$$\frac{f_i}{f_r} \propto \frac{f_{ix}}{f_{ryx}} = \frac{\rho u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dV}{\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot dV} \quad (56)$$

En esta ecuación

$$u \propto g, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \propto \frac{g}{d} \quad (57)$$

Similarmente,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \propto \frac{g}{d^2} \quad (58)$$

Substituyendo estos resultados en la ecuación (56) queda

$$\frac{f_i}{f_r} \propto \frac{\rho \cdot \frac{q^2}{d}}{\eta \frac{q}{d^2} \cdot \frac{\eta}{\rho}} = R. \quad (59)$$

Como las ecuaciones (56)-(59) son idénticas para los dos sistemas cinemáticamente similares, se deduce que la cantidad "R" definida por la ecuación (59) debe ser la misma para cada una. "R" es conocida como el "Número de Reynolds" del sistema, llamada así en honor de Osborne Reynolds (6), cuyos estudios iniciales descubrieron en primer término su significancia.

Es importante que se aprecie la generalidad de la ecuación (59) pues, como se aplica igualmente a cualquiera de dos sistemas cinemáticamente similares, resulta que

$$\frac{q_1 d_1}{\frac{\eta_1}{\rho_1}} = \frac{q_2 d_2}{\frac{\eta_2}{\rho_2}} = R, \quad (59a)$$

a pesar de que las escalas de longitud, las descargas, la viscosidad y densidad de los fluidos pueden diferir ampliamente en ambos casos.

Recíprocamente, dos estados cualesquiera de flujo a través de armazones geoméricamente similares serán cinemáticamente similares cuando ambos tengan el mismo valor de Número Reynolds; pero para el mismo fluido en el mismo armazón, como "R" es proporcional a "q", esta condición no puede ser satisfecha estrictamente para distintas velocidades de flujo. Prácticamente, es satisfecha para valores muy pequeños de "R", ya que, mientras tanto " f_i " como " f_r " tienden a cero cuando "q" tiende a cero, " f_i " disminuye más rápidamente que " f_r ", y su relación, que es proporcional a "R", tiende también a

cero cuando "q" y "R" tienden a cero -el así llamado "movimiento deslizando" del flujo. Cuando " f_i " es insignificante en comparación con " f_r ", nuestro equilibrio de fuerzas se reduce simplemente a

$$f_r = -fd \quad (60)$$

para cada elemento de volumen dentro del sistema de flujo.

Ahora, si concordamos en mantener las velocidades de flujo lo suficientemente pequeñas como para que las fuerzas debidas a la inercia sean insignificantes y para que, por lo tanto, la ecuación (60) sea válida, podemos integrar " f_r " para todos los elementos de volumen microscópico de un volumen macroscópico. La resultante será " F_F ", la fuerza resistiva actuante sobre el elemento macroscópico de volumen. Para efectuar esta integración observamos que en todos los puntos " f_r " es dirigida paralela a la trayectoria y que, al menos en la mayoría de los casos, opuesta a la dirección del movimiento. También, en cada punto " f_r " es proporcional en magnitud al vector de velocidad " v ".

Supongamos que el flujo macroscópico es uniforme y rectilíneo. Entonces, si elegimos un eje paralelo a esta dirección de flujo macroscópico, podemos descomponer la velocidad microscópica en cada punto en una componente axial " $v \cos \theta$ " y una componente normal " $v \sin \theta$ ", donde " θ " es el ángulo que la trayectoria hace con este eje. Como el movimiento neto del fluido normal al eje es cero, entonces debe haber un número igual de componentes normales en todas direcciones, para que se cancelen entre sí completamente.

Los componentes axiales, por el contrario, tienen todos la misma dirección; y su valor promedio, " \bar{v} ", en un elemento de volumen macroscópico debe ser obtenido por integración:

$$\bar{v} = \frac{\iiint \frac{v \cos \theta \cdot dV}{\epsilon \cdot \Delta V}}{\epsilon \cdot \Delta V} = \frac{q}{\epsilon} \quad (61)$$

El producto " $\epsilon \cdot \Delta V$ " es la fracción de un volumen macroscópico que está ocupada por el fluido, y es necesaria la división de la integral de la ecuación (61) por esta cantidad para obtener la velocidad promedio. De otra forma tendríamos la suma de las componentes axiales.

Ahora, teniendo en cuenta que " f_r " es proporcional a " v ", ella, también, puede ser descompuesta en componentes radiales y axiales, e integrada. Para las componentes radiales

$$\iiint \frac{f_r \sin \theta \cdot dV}{\epsilon \cdot \Delta V} \propto \iiint \frac{v \sin \theta \cdot dV}{\epsilon \Delta V} = 0 \quad (62)$$

Esto deja solamente las componentes axiales cuya suma algebraica o integral para el volumen " $\epsilon \cdot \Delta V$ " es la fuerza resistiva macroscópica " F_r ":

$$\iiint \frac{f_r \cos \theta \cdot dV}{\epsilon \cdot \Delta V} = F_r \propto -\eta \cdot \frac{q}{d^2} \cdot \epsilon \cdot \Delta V \quad (63)$$

Ahora, si hacemos que " $1/N$ " sea la constante de proporcionalidad, podemos escribir para la fuerza resistiva:

$$F_r = -\frac{1}{N} \cdot \eta \cdot \frac{q}{d^2} \cdot \epsilon \Delta V \quad (64)$$

Si dividimos ésto por " $\rho \epsilon \cdot \Delta V$ ", obtendremos

$$\frac{F_r}{\rho \epsilon \cdot \Delta V} = -\frac{1}{N} \cdot \frac{\eta}{\rho} \cdot \frac{q}{d^2}, \quad (65)$$

que es la fuerza resistiva por unidad de masa de fluido.

En la escala macroscópica las dos fuerzas que actúan sobre el fluido contenido en un elemento de volumen " V " son la fuerza impulsora y la fuerza resistiva, y éstas deben ser iguales en magnitud y opuestas en dirección, de modo que

$$F_r = -F_d. \quad (66)$$

También, las direcciones de estas dos fuerzas deben ser paralelas a la dirección macroscópica del flujo, " F_d " en la dirección del movimiento y " F_r " en la dirección opuesta.

Ya hemos relacionado a " F_r " con el movimiento macroscópico del fluido; investiguemos ahora la fuerza impulsora, " F_d ". Tomemos un elemento de volumen macroscópico que consista en un prisma cuya longitud sea " L " y cuya superficie de sección normal sea " A ", orientado con su eje paralelo a la dirección del flujo macroscópico. La fuerza impulsora que actúa sobre el fluido dentro de este elemento de volumen será la resultante de las fuerzas superficiales sobre su exterior y de las fuerzas de cuerpo sobre la masa de su interior. En este caso las fuerzas superficiales consisten solamente de tensiones normales, ya que las tensiones transversales se gastan contra el armazón rígido del medio en todo el interior del cuerpo y no son transmitidas a distancias apreciablemente mayores que el promedio de diámetro granular " d ". Su efecto es por lo tanto, en una escala macroscópica, similar a una fuerza de cuerpo y aumenta la fuerza resistiva " F_r ", que ya ha sido evaluada. La tensión normal que actúa sobre la superficie del elemento de volumen macroscópico es la presión

hidrostática del fluido "p". Para la fuerza de cuerpo tenemos solamente la atracción debida a la gravedad.

La fuerza impulsora total debe ser la suma de la fuerza neta sobre el elemento de volumen debido a la presión, y de la fuerza debida a la atracción gravitacional. Como el fluido tiene libertad para fluir en cualquier dirección, esta resultante debe tener la dirección del flujo de fluido, y solo necesitamos considerar las componentes de las otras dos fuerzas en esa dirección.

Para la componente de la fuerza debida a la presión, "p" será la presión sobre el extremo del prisma situado aguas arriba, y "p + (∂p/∂l)Δl" la presión sobre el extremo aguas abajo. Definimos la dirección del flujo con el ángulo α que forma con la vertical dirigida hacia arriba. Entonces la componente de la fuerza impulsora debida a la presión en la dirección del flujo α es

$$F_{pa} = p \epsilon \cdot \Delta A - \left(p + \frac{\partial p}{\partial l} \cdot \Delta l \right) \epsilon \cdot \Delta A = - \frac{\partial p}{\partial l} \cdot \epsilon \cdot \Delta V, \quad (67)$$

donde "ε.ΔA" es la fracción de "ΔA" que está ocupada por el fluido, y "ε.ΔV" el volumen de fluido dentro del prisma.

Si dividimos la ecuación (67) por "ρ.ε.ΔV", obtenemos

$$\frac{F_{pa}}{\rho \cdot \epsilon \cdot \Delta V} = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial l}, \quad (68)$$

que es la componente de la fuerza por unidad de masa del fluido en la dirección α producida por el cambio de la presión macroscópica en esa dirección. Es numéricamente igual al índice de aumento de la presión con la distancia, y dirigido en sentido opuesto. Esto es, la fuerza debida sólo a la presión es siempre dirigida desde regiones donde la presión es mayor hacia las regiones donde es menor.

La componente en la dirección "Q" de la fuerza ejercida por la gravedad que actúa sobre el fluido contenido dentro del volumen " ΔV " es

$$F_{gQ} = -g \cos \alpha \cdot \rho \epsilon \cdot \Delta V = -g \cdot \frac{\partial z}{\partial l} \cdot \rho \epsilon \cdot \Delta V \quad (69)$$

El signo negativo aquí es necesario para permitir el hecho de que para flujo hacia arriba $\cos \alpha$ es positivo, mientras para el flujo hacia abajo es negativo. En la expresión " $\partial z / \partial l$ ", "z" es la co-ordenada vertical, o la elevación sobre el nivel básico de elevación.

Ahora, sumando las ecuaciones (67) y (69) resulta la fuerza impulsora total que actúa sobre el fluido en el elemento de volumen " ΔV ",

$$F_d = \left(-g \cdot \frac{\partial z}{\partial l} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial l} \right) \rho \epsilon \cdot \Delta V; \quad (70)$$

y, si dividimos ésto por " $\rho \epsilon \cdot \Delta V$ ", obtenemos

$$\frac{F_d}{\rho \epsilon \cdot \Delta V} = -g \cdot \frac{\partial z}{\partial l} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l}, \quad (71)$$

que es el total de fuerza impulsora que actúa sobre cada unidad de masa del fluido.

Si, volvemos ahora a las ecuaciones (30) y (31) y las diferenciamos con respecto a "l", y después comparamos los resultados con la ecuación (71), encontraremos que

$$\dots \dots \dots \quad (72)$$

de modo que

$$\frac{\Gamma_d}{\rho c \Delta V} = - \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (73)$$

Por lo tanto, la fuerza impulsora total por unidad de masa del fluido es numéricamente igual al índice de aumento con la distancia del potencial del fluido, y tiene dirección opuesta.

Como la suma de las fuerzas macroscópicas por unidad de masa debe ser cero, entonces, agregando las expresiones para tales fuerzas que nos dan las ecuaciones (65) y (73), obtenemos

$$-\frac{I}{N} \cdot \frac{v}{\rho} \frac{v}{dz} - \frac{c\phi}{dt} = 0, \quad (73a)$$

lo que, extrayendo "q", da

$$q = -v dz \cdot \frac{\rho}{\eta} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} = -N dz \cdot \frac{\rho}{\eta} g \cdot \frac{z}{g} \quad (74)$$

Cuando esto es comparado con la Ley de Darcy expresada por la ecuación (34), resulta claro que las ecuaciones (34) y (74) son equivalentes y que

$$k = N dz \rho \cdot \frac{I}{\eta} \cdot \frac{z}{g} \quad (75)$$

de modo que los cinco factores a la derecha de la ecuación (75) son las cantidades que originalmente nos propusimos descubrir y que fueron agrupadas como el parámetro "K". De éstas, todas han sido definidas excepto el factor "N", que empleamos como un factor de proporcionalidad cuando relacionamos la fuerza resistiva a la velocidad del fluido. "N" es simplemente un coeficiente numérico sin dimensión cuyo valor depende de la forma geométrica de la estructura interna del medio a

cuyo través se produce el flujo. Para dos medios geoméricamente similares los valores de "N" serían los mismos; para medios no similares, tales como granos de formas redondas contra otros de formas angulares, los valores de "N" serían diferentes. Las dimensiones de "N" son hasta entonces

$$[N] = [\text{ang}^2] = [L^{-2}] = [L^0]. \quad (76)$$

Como su efecto es determinado solamente en forma experimental, no es necesaria una definición mas precisa de "N".

Que las cinco cantidades a la derecha en la ecuación (75) son las correctas, que se producen por sus debidas fuerzas, y que otras cantidades esenciales no han sido omitidas, puede ser demostrado por una verificación dimensional simple. Operamos la ecuación (74):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -N^2 \rho \cdot \frac{I}{\eta} \cdot g, \quad (76a)$$

donde los términos a investigar son segregados a la derecha. Si la ecuación es correcta, entonces las dimensiones del término a la derecha deben ser iguales a las del término a la izquierda.

Las dimensiones de los factores separados son:

$$\begin{aligned}
 [q] &= [L T^{-1}], \\
 \left[\frac{I}{SA} \right] &= [L^0], \\
 [V] &= [L^0], \\
 d^2 &= [L^2], \\
 [\rho] &= [M L^{-3}], \\
 \left[\frac{1}{\eta} \right] &= [M^{-1} L + 1 T + 1], \\
 [\xi] &= [L T^{-2}].
 \end{aligned} \tag{77}$$

Introduciendo estos valores en la ecuación (74) resulta la expresión dimensional

$$\left[\frac{q}{SA} \right] = \left[N d^2 \rho \cdot \frac{I}{\eta} \cdot \xi \right], \tag{78}$$

6

$$\left. \begin{aligned}
 [M^0 L + 1 T^{-1}] &= [L^0 L^2 M + 1 L^{-3} M^{-1} L + 1 T + 1 L + 1 T^{-2}] \\
 &= [M^0 L + 1 T^{-1}].
 \end{aligned} \right\} \tag{79}$$

El hecho de que estas dimensiones balanceen es interpretado como significado de que todos los factores contenidos en "K" son dados en el lado derecho de la ecuación (78). De éstos, solo "N" puede ser

aún dividido en componentes adicionales, tales como porosidad y otros parámetros geométricos. En la práctica no hay necesidad para tal discección, ya que "N" y "d²" son más convenientemente reunidos como una sola propiedad del medio. Consecuentemente, podemos ver la ecuación (74)

$$q = -Nd^2 \cdot \frac{\rho}{\eta} \cdot \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} = -Nd^2 \cdot \frac{\rho}{\eta} \cdot g \cdot \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (79a)$$

como equivalente a la Ley de Darcy y completa expresión de la misma en la forma mas general que necesitaremos. Esto nos dice que, además de los factores ya investigados, "q" varía directamente como un factor "N" dependiente de la forma interna del medio, como el cuadrado del tamaño granular u otra escala de longitud adecuada que indique el "grano", como la densidad del fluido, e inversamente como la viscosidad del fluido.

Llegamos ahora al problema de una definición más precisa de la permeabilidad que la cualitativa dada antes. De las cinco cantidades "N", "d²", "ρ", "1/η" y "g" de la ecuación (74), las dos primeras, "N" y "d²", son propiedades solamente del medio; las dos siguientes, "ρ" y "η" son propiedades solamente del fluido; la última, "g", es una propiedad del campo gravitacional de la tierra y puede ser tomada, con el propósito establecido, como constante. Sería posible seleccionar de estas cinco cantidades cualquier combinación que incluya las propiedades del medio, "N" y "d²", y hacer de ella un solo parámetro agupado que podría ser llamado el "coeficiente de permeabilidad". Como se tratará mas adelante, esto es esencialmente lo que se ha hecho ya, de modo que numerosas cantidades dimensionalmente desiguales, todas llamadas "permeabilidad", están corrientemente en uso.

Para evitar esta clase de confusión, preguntamos qué queremos que signifique un coeficiente de permeabilidad. Ya hemos notado que el

concepto pertenece a la facilidad con que una roca o material dado transmite fluidos. Presumiblemente, entonces, la permeabilidad debe ser tomada como una propiedad del medio solo. Si es así, entonces un coeficiente de permeabilidad para un medio dado no debe cambiar de valor cuando se emplean diferentes fluidos. Para satisfacer este requisito agrupamos los factores " Nd^2 ", que dependen solamente del medio, en el factor único " K " y entonces escribimos la Ley de Darcy como

$$q = -k \cdot \frac{\rho}{\eta} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial l}, \quad (80)$$

donde " K " es el coeficiente de permeabilidad del medio. Para cualquier medio dado su valor se obtiene con un experimento análogo al de la Figura 1, donde todas las cantidades excepto " K " son medidas por experimento, y entonces la ecuación (80) es resuelta para " K ".

Las dimensiones de " K " son

$$[K] = [Nd^2] = [L^2]. \quad (81)$$

Para propósitos de análisis matemático nos ocupamos frecuentemente del índice de flujo sin reparar en las influencias separadas de las propiedades del fluido y las del medio. En este caso es más conveniente agrupar los factores " K ", " ρ " y " $1/\eta$ " en un solo parámetro " σ ", lo que entonces simplifica la Ley de Darcy a

$$q = -\sigma \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial l}, \quad (82)$$

una forma que es físicamente, tanto como matemáticamente, análoga a la Ley de Ohm en electricidad cuando se la aplica a medios extendidos. En el flujo de electricidad el factor análogo a " σ " es llamado la "conductividad eléctrica específica"; aquí llamaremos a " σ " la "con-

ductividad específica de fluidos". De esta definición resulta claro que la conductividad específica de fluidos es una propiedad tanto del medio como del fluido. Para un líquido homogéneo bajo condiciones isotermales la densidad y la viscosidad son constantes. En este caso la conductividad específica variará proporcionalmente a la permeabilidad del medio.

5. AMBITO DE VALIDEZ DE LA LEY DE DARCY

Entramos ahora al problema del ámbito de validez de la Ley de Darcy, que establece que el índice de flujo aumenta linealmente con la gradiente potencial. Para qué valores de "q" tendrá que ser cierto esto? Esto nos lleva de vuelta a nuestra derivación del valor de la fuerza resistiva " f_r " en términos de "q" en la ecuación (58) y ecuaciones precedentes a ella. Podemos recordar que estuvimos obligados a estipular que el flujo debía mantener similitud cinemática para valores distintos de "q" y que encontramos que podíamos satisfacer esta condición solamente haciendo que las velocidades fuesen tan pequeñas que las fuerzas debidas a la inercia se volviessen negligibles. Bajo estas condiciones dedujimos analíticamente la Ley de Darcy.

Qué ocurriría ahora si aumentásemos la velocidad a un punto en el que las fuerzas de la inercia no fuesen negligibles pero sí comparables en magnitud a las otras fuerzas? Como, en general, las fuerzas inerciales no son paralelas a las trayectorias sino que tienen orientaciones sin orden, esto puede solamente producir distorsión en las trayectorias, causando agolpamientos donde la curvatura es aguda. A velocidades aún mayores pueden también formarse remolinos detrás de algunos de los granos de arena donde las trayectorias se apartan de la superficie granular. Todo esto está comprendido en los límites del flujo estrictamente laminar y no implica turbulencia en ningún grado.

Para el flujo macroscópico rectilíneo y uniforme de un líquido

la integral de las fuerzas debidas a la inercia sobre un volumen macroscópico es cero, de modo que éstas no puedan ejercer ningún efecto retardatorio directo sobre el movimiento del fluido. Lo que hacen, sin embargo, es producir distorsión que aumenta los términos de la fórmula " $\partial^2 u / \partial y^2$ ", de la cual dependen las fuerzas resistivas. Como las fuerzas debidas a la inercia aumentan como el cuadrado de la velocidad, este efecto no es lineal con respecto a "q"; y para valores de "q" para los que las fuerzas inerciales no son negligibles la resistencia al flujo debe aumentar a un índice progresivamente mayor al aumentar "q". Por lo tanto, la Ley de Darcy puede solamente tener validez para valores de "q" lo suficientemente pequeños para que las fuerzas inerciales sean negligibles.

Es más conveniente, debido a la universalidad de la relación, referir este ámbito de validez al Número de Reynolds "R", definido por la ecuación (59), ya que, en medios geoméricamente similares, se producen flujos cinemáticamente similares a iguales valores de esta cantidad. En el presente problema hay tres valores del Número de Reynolds de particular significancia: "R" = 0, correspondiente a flujo cero; "R = R*" , el punto en el cual las fuerzas inerciales se vuelven efectivas; y "R = R_{crit.}" cuando el flujo se torna turbulento. Los valores de "R*" y "R_{crit.}" para cualquier armazón geométrica particular pueden ser determinados únicamente por experimentos. Hasta ahora ha sido costumbre casi universal entre los estudiosos de esta clase de flujos, suponer sin cuestión que la separación de la linealidad de "q" con respecto a " $d\phi/dl$ ", o su equivalente, era evidencia de la iniciación de turbulencia. Este error probablemente proviene del hecho de que la mayoría de los estudios sobre la transición del flujo lineal a flujo turbulento han sido conducidos sobre flujos a través de tubos derechos uniformes. En el flujo de líquidos a través de tubos rectilíneos no existe ninguna aceleración hasta que el movimiento se torna inestable y la turbulencia se establece. Consecuentemente, para este caso especial, "R" y "R_{crit.}" coinciden.

En flujos con movimiento curvilíneo y aceleración paralela a las trayectorias, los dos valores pueden ser remotos entre sí.

Para tubos rectos el Número de Reynolds es comunmente definido en términos de la velocidad promedio del fluido, " \bar{w} ", y del radio, " r ". Entonces se encuentra experimentalmente que el valor crítico es

$$R_{crit} = \frac{\bar{w}r}{\eta} \approx 1,160. \quad (82a)$$

Para sedimentos hemos definido al Número de Reynolds como

$$R = \frac{qd}{\eta} \frac{\rho}{\rho} \quad (82b)$$

donde " q " es la descarga específica y " d " el diámetro granular promedio. Esto obviamente dá solamente un orden de magnitud, porque sedimentos diferentes pueden apartarse ampliamente de la similaridad geométrica. Lindquist (7), empleando un medio compuesto de municiones de plomo uniformes, con una porosidad del 38 por ciento, encontró que el valor de " R " era de aproximadamente 4. Esto fue correcto para distintos experimentos en los que se utilizaron municiones con diámetros que variaron de 1 a 5 mm. Para valores de " R " de hasta 180 el flujo era todavía laminar, de modo que para este sistema " $R_{crit.}$ " debe ser mayor que 180.

Para agua a 20°C la viscosidad cinemática " η/ρ " es 0,01 c.g.s., por lo que a través de arena compuesta por esferas uniformes con 38 por ciento de espacio poroso, la descarga específica máxima para la cual es aplicable la Ley de Darcy se obtiene resolviendo la siguiente ecuación para " q ":

$$\left. \begin{aligned} \frac{q_{\max} d}{\frac{\eta}{\rho}} &= R^* = 4, \\ q_{\max} &= \frac{0.04}{d} \text{ cm/sec} \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Para una arena gruesa con un diámetro granular de 0,1 cm. la descarga específica máxima para la cual la Ley de Darcy tendrá validez sería de aproximadamente 0,4 cm/seg. A este ritmo, desde una arena de 3 metros de espesor el flujo de agua a un pozo de 10 cm. de radio sería a razón de 7,5 litros (casi un galón) por segundo, o aproximadamente 4.000 barriles por día. Para arenas más finas el valor limitante de "q" sería correspondientemente mayor. Como para tal flujo la velocidad disminuye rápidamente con la distancia desde el pozo, resulta claro que solo excepcionalmente se encontrarán índices de flujo en aguas subterráneas fuera del límite más alto de validez de la Ley de Darcy..

No hay razón aparente para suponer la existencia de algún límite inferior al ámbito de validez de la Ley de Darcy por debajo de "R" = 0, correspondiente a "q" = 0. Pruebas efectuadas por Fishel (8) sobre el flujo de agua a través de arena establecieron la validez de la Ley de Darcy para valores de "q" tan reducidos como aproximadamente 4×10^{-8} cm/seg, correspondientes a valores de " $\partial h / \partial l$ " tan bajos como 2 o 3 pulgadas/milla, o aproximadamente 6×10^{-5} .

6. LA LEY DE DARCY PARA GASES.

Mientras nuestra investigación del potencial de los fluidos fue intencionalmente hecha con suficiente generalidad para incluir tanto los líquidos como los gases, nuestro interés hasta ahora se refirió principalmente a la interpretación del experimento de la Figura 1 en el cual los fluidos utilizados han sido solamente líquidos. Donde debe medirse la permeabilidad de diferentes muestras de materiales, tiene muchas ventajas experimentales el uso de un gas, tal como el aire,

aire, como el fluido experimental. No disuelve los componentes del espécimen ni reacciona con él químicamente. Sin embargo, antes de poder utilizar un gas, debemos extender la teoría para incluir la compresibilidad de acuerdo a las leyes de los gases.

Consideremos el flujo constante de un gas a través de un tubo de sección uniforme llenado con arena u otro material uniformemente permeable bajo condiciones isotérmicas. En este caso, al cambiar la presión a lo largo del tubo, también varía el volumen específico del gas, de modo que el volumen de descarga "q" no será el mismo a través de secciones transversales sucesivas del tubo, pero variará inversamente con respecto a la presión. Como no hay acumulación de gas en ninguna parte de la región del flujo, entonces la masa de gas fluyendo a través de cada sección transversal debe ser constante. Entonces, para cada sección transversal dada, si "q" es el volumen de descarga específico para esa sección y " ρ " la densidad del gas al cruzar la sección, la masa de gas que cruza unidad de superficie por unidad de tiempo debe ser

$$j = \rho q = \text{constant}, \quad (84)$$

donde "j" es la "descarga de masa específica".

Para cualquier distancia infinitesimal " dl " a lo largo del eje del tubo en la dirección del flujo, la densidad " ρ " del gas puede ser considerada como constante; y la Ley de Darcy en su forma diferencial,

$$q = -Nd^2 \cdot \frac{\rho}{\eta} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial l}, \quad (84a)$$

es tan válida para gases como para líquidos. Entonces, si multiplicamos ambos lados por " ρ ", obtenemos

$$\rho g = f = -N g^2 \cdot \frac{\rho^2}{\eta} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial l}, \quad (85)$$

que también es válida para gases y para líquidos por igual.

Sin embargo, para gases, " ρ " no es ya una constante sino que varía continuamente con la distancia a lo largo del eje del cilindro, estando relacionadas la densidad y la presión por la Ley de Boyle,

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0}, \text{ or } \rho = p \frac{\rho_0}{p_0}, \quad (86)$$

donde " ρ_0 " y " p_0 " son la densidad y la presión en el estado básico de la atmósfera. También, para este caso debemos emplear la forma más general del potencial del fluido

$$\Phi = g z + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} \quad (86a)$$

de la ecuación (30) que, sin embargo, tiene la misma derivativa

$$\frac{d\Phi}{dl} = g \cdot \frac{\partial z}{\partial l} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial l}, \quad (87)$$

que la forma válida solamente para líquidos.

La viscosidad de un gas, sin embargo, tal como es predicha por la teoría cinética de los gases y confirmada por experimentos, es independiente de las variaciones de presión en una amplitud de presiones comparable a la amplitud para la que las leyes sobre gases tienen validez. Entonces, " η " para un gas único a temperatura constante tiene el mismo valor fijo.

Ahora, si introducimos la ecuación (87) en la (85), tenemos

$$j = -\frac{Nd^2}{\eta} \cdot \rho^2 \left(g \cdot \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \right). \quad (88)$$

El primer término entre paréntesis es la componente de la fuerza por unidad de masa, debida a la gravedad; el segundo término es la fuerza correspondiente debida a la presión. Para gases bajo presiones del medio " ρ " es pequeño comparado con la unidad, y la gradiente de presión puede ser grande, de modo que salvo casos excepcionales el segundo término es tan mayor que el primero que no resultará ningún error de significación si despreciamos el término " $g(\partial z/\partial t)$ ". Con esta simplificación la ecuación (88) se reduce a

$$j = -\frac{Nd^2}{\eta} \cdot \rho \cdot \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (89)$$

la que entonces, introduciendo el valor de " ρ " dado en la ecuación (86), se transforma en

$$j = -\frac{Nd^2}{\eta} \cdot \frac{p_0}{p_0} \cdot p \cdot \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (90)$$

Sin embargo, como

$$p \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(p^2)}{\partial t}, \quad (91)$$

la ecuación (90) puede escribirse

$$j = -\frac{Nd^2}{\eta} \cdot \frac{p_0}{p_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(p^2)}{\partial t}. \quad (92)$$

Entonces, como todos los otros términos son ya constantes,

$$\frac{d(p^2)}{dl} = \text{constant}, \quad (93)$$

lo que nos dice que el índice de disminución del cuadrado de la presión con la distancia en la dirección del flujo es constante y que la descarga de masa específica es proporcional a esto.

Si insertamos dos manómetros en el sistema, separados por una distancia finita "l" (correspondiente a los tubos manométricos de la Figura 1), entonces

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d(p^2)}{dl} = \frac{p_2^2 - p_1^2}{2l} = \frac{p_2 + p_1}{2} \cdot \frac{p_2 - p_1}{l} = \bar{p} \cdot \frac{p_2 - p_1}{l}, \quad (94)$$

donde "p₁" y "p₂" son dos presiones y "p̄" es su promedio aritmético.

La introducción de esto en la ecuación (92) reduce esa ecuación a la forma (9)

$$j = -\frac{Nd^2}{\eta} \cdot \frac{p_0}{p} \cdot \frac{\bar{p}(p_2 - p_1)}{l}, \quad (95)$$

para la cual todos los términos son determinables experimentalmente excepto "Nd²". Entonces el cálculo de "Nd²" da la permeabilidad "k" para el medio.

Difícilmente necesita ser agregado que el valor de la permeabilidad de una arena dada, obtenido de esta manera, debería estar ajustadamente de acuerdo con el valor obtenido empleando un líquido.

7. FLUJO A TRAVÉS DE MEDIOS EXTENSIVOS

Hasta ahora hemos considerado solamente el caso de flujo uniforme

y rectilíneo a través de un cuerpo prismático de arena, uniforme e isotrópico con respecto a permeabilidad. Queda ahora por determinar si los resultados hasta este momento son aplicables al caso general de flujo a través de medios extensivos no homogéneos tales como los que se encuentran en problemas de flujo de aguas subterráneas en el terreno. Para este propósito emplearemos exclusivamente el punto de vista macroscópico. También mantendremos la presunción de que el medio es isotrópico con respecto a permeabilidad, aunque reconociendo que en el caso de algunas rocas sedimentarias esta presunción no es válida.

Nuestro problema, entonces, es un problema de terreno, y necesitamos introducir unos pocos conceptos que han llegado a ser comunes en el tratamiento de dichos problemas. Cuando en cualquier región del espacio existe en cada punto un valor particular de alguna cantidad física dada -temperatura, por ejemplo- esa región es denominada un campo en la cantidad considerada. Si la temperatura fuese tal cantidad, el campo sería un campo termal. Si la cantidad constituyente del campo es una escalar, es decir, si es definible por un solo número, como la temperatura, entonces el campo es un campo escalar. Si la cantidad es un vector, tal como fuerza o velocidad, entonces el campo es llamado un campo vectorial. Existe otro campo de orden aún más elevado para cantidades tales como tensión, que en general son definibles por nueve cantidades independientes. Esta clase de campo es un campo tensorial.

La variación de casi todas las cantidades físicas en el espacio es continua con la distancia, de modo que la diferencia de valores de la misma cantidad en dos puntos cercanos decrece continuamente al reducirse más y más la distancia entre los puntos, aproximándose a cero como un límite. Las regiones en que la variación es continua pueden, sin embargo, estar sujetas por superficies de discontinuidad.

En regiones libres de discontinuidades, a través de cada punto en

un campo escalar puede pasar una superficie sobre la cual todos los valores de la cantidad escalar sean iguales que en el punto dado. Esta superficie entonces dividirá la región en dos partes, una de las cuales contendrá todos los valores mayores de la cantidad considerada, y la otra todos los menores, con respecto a los valores de la superficie misma. Tales superficies pueden ser denominadas superficies de campo, y habrá una superficie de campo pasando a través de cada punto en el campo. Una superficie isotérmica es una superficie de campo para un campo termal.

Para campos vectoriales en una región libre de discontinuidades tenemos las líneas de campo. Una línea de campo es el lugar geométrico de un punto que se mueve a través de un campo vectorial de manera tal que en todo punto su dirección de movimiento coincide con la dirección del vector en ese punto.

Un campo estacionario es un campo en cuya totalidad los valores de la cantidad de que consiste el campo permanecen invariantes con el tiempo.

En una región libre de discontinuidades en las cantidades consideradas, para cada campo escalar existe un campo vectorial asociado, siendo posible obtener la relación entre ambos de la siguiente manera:

Hagamos que " Ω " sea cualquier cantidad escalar cuyos valores se suponen conocidos en todos los puntos en su campo y cuyo campo es estacionario y continuo. En un punto "O" en este campo erigimos los ejes "x", "y" y "z". Hagamos pasar la superficie de campo " $\Omega = \Omega_0$ " por el origen. Para ésto erigimos una normal a la superficie "n" en la dirección de los valores crecientes de " Ω ", " α ", " β " y " γ " son los ángulos que forma "n" con la dirección positiva de los ejes "x", "y" y "z", respectivamente. A una distancia "n" desde el origen la superficie " $\Omega_0 + \Delta\Omega$ ", sensiblemente paralela a la superficie " Ω_0 ",

intersecta la normal "n". Esta misma superficie intersecta los ejes co-ordenados a distancias " Δ_x ", " Δ_y " y " Δ_z " desde el origen.

Estamos ahora interesados en encontrar el índice de cambio con la distancia de la cantidad " Ω " en las varias direcciones en el espacio alejándose del punto "O". En la dirección "n" el promedio del índice de cambio a través de la distancia " Δn " es " $\Delta\Omega/\Delta n$ ". Los índices promedios correspondientes a lo largo de los tres ejes son " $\Delta\Omega/\Delta x$ ", " $\Delta\Omega/\Delta y$ ", y " $\Delta\Omega/\Delta z$ ", respectivamente.

Pero

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= \frac{\Delta n}{\cos \alpha}, \\ \Delta y &= \frac{\Delta n}{\cos \beta}, \\ \Delta z &= \frac{\Delta n}{\cos \gamma}, \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

de modo que

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta\Omega}{\Delta x} &= \frac{\Delta\Omega}{\Delta n} \cdot \cos \alpha, \\ \frac{\Delta\Omega}{\Delta y} &= \frac{\Delta\Omega}{\Delta n} \cdot \cos \beta, \\ \frac{\Delta\Omega}{\Delta z} &= \frac{\Delta\Omega}{\Delta n} \cdot \cos \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

Entonces, si pasamos a los límites dejando que " Δn " se aproxime a cero, las ecuaciones (97) se convierten en

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta \Omega}{\Delta x} &\rightarrow \frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial n} \cdot \cos \alpha, \\ \frac{\Delta \Omega}{\Delta y} &\rightarrow \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{\partial \Omega}{\partial n} \cdot \cos \beta, \\ \frac{\Delta \Omega}{\Delta z} &\rightarrow \frac{\partial \Omega}{\partial z} = \frac{\partial \Omega}{\partial n} \cdot \cos \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

La dirección de la normal a la superficie "n" está determinada por el campo y, por lo tanto, fijada en el espacio. La orientación de los ejes "x", "y" y "z", por otra parte, es arbitraria, de modo que, separadamente, los ángulos "α", "β", y "γ" pueden variar desde 0° hasta 180°. Consecuentemente, los límites de los valores de sus cosenos son

$$\left. \begin{aligned} -1 &\leq \cos \alpha \leq 1, \\ -1 &\leq \cos \beta \leq 1, \\ -1 &\leq \cos \gamma \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

Ahora, si tomamos cualquier línea "s" que forme un ángulo "θ" con la dirección de "n", estamos en libertad para orientar el eje "x" a lo largo de esta línea, haciendo iguales a "α" y "θ". Entonces

$$\frac{\partial \Omega}{\partial s} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial n} \cdot \cos \theta \equiv \text{grad } \Omega \cdot \cos \theta. \quad (100)$$

Aquí grad. "Ω" (léase "la gradiente de Ω") es idéntica a "∂Ω/∂n". Como cos. "θ" es siempre igual o menor que la unidad, sigue que grad. "Ω", que es el índice de aumento de "Ω" en la dirección de la normal a la superficie, es el índice máximo de aumento en cualquier

dirección.

También, como los índices de cambio en todas las otras direcciones están relacionados con grad." Ω " de la misma manera en que las componentes de un vector están relacionadas al vector mismo, entonces grad." Ω " puede ser tomada como un vector cuya dirección es paralela a "n" y cuya magnitud es igual al máximo índice de cambio de " Ω " con la distancia.

Por lo tanto, a cada campo escalar en cualquier cantidad escalar " Ω " le corresponde un campo vectorial en la cantidad vectorial grad." Ω " cuyas líneas de campo están en todo lugar a ángulos rectos con las superficies de campo " Ω " = una constante, y dirigidas desde regiones en las que " Ω " es menor hacia aquellas en que es mayor.

Las dimensiones físicas de la cantidad vectorial grad." Ω " son

$$[\text{grad } \Omega] = \left[\frac{\Omega}{\text{length}} \right], \quad (101)$$

que pueden representar una fuerza, una velocidad, u otra cantidad vectorial, dependiente de la naturaleza de la escalar " Ω ". También, pueden coexistir muchas clases diferentes de campos escalares y vectoriales en la misma región de espacio, tantas como las cantidades escalares y vectoriales que existan en cada punto en ese espacio.

8. APLICACION AL FLUJO DE FLUIDOS.

Con estos antecedentes, volvamos ahora para considerar un campo en el que nuestro interés particular resida en agua subterránea u otro fluido. Supondremos que todos los campos son estacionarios para no estar obligados a considerar cambios en el campo con el tiempo. Aún cuando tales cambios se impongan, consideraremos solo los estados estables existentes antes y después del cambio, y evitaremos la etapa transitoria durante la cual tienen lugar los cambios. En muchos

casos donde hay fluctuaciones más o menos continuas gobernadas por irregularidades de precipitación local y otros factores climáticos, nos conformaremos con considerar el estado promedio del sistema a través de un período de tiempo de un año o más.

Entre las cantidades escalares cuyos campos son de interés en el estudio del movimiento de fluidos están los de la presión hidrostática "p", del potencial de gravedad "U", y del potencial del fluido " ϕ ". Cada una de estas cantidades tiene su familia de superficies de campo separadas, normales a la cual está la familia respectiva de líneas de campo correspondientes a los campos vectoriales de las cantidades grad."p", grad."U" y grad." ϕ ". En adición a estos tres campos vectoriales derivados tenemos el del flujo del fluido mismo.

Nuestro problema ahora es investigar estas varias clases de campos para poder aprender la manera en que influyen el flujo de un fluido a través de un medio permeable en una región extensa de espacio. Tomando el campo vectorial más obvio en primer lugar, consideremos el del flujo mismo. Inyectando filamentos de tinte u otros marcadores visibles en puntos específicos, encontramos que el fluido que pasa a través de cada punto sigue un camino definido, al que denominaremos línea de flujo o trayectoria. La familia de todas las trayectorias es evidentemente el sistema de líneas de campo de un campo vectorial. El vector en sí todavía debe ser determinado.

El vector del flujo puede ser determinado si delimitamos un pequeño elemento plano de superficie, de área " ΔS " cuya normal forma el ángulo " θ " con las líneas de flujo. Entonces la proyección " ΔS_n " de este elemento de superficie sobre un plano perpendicular a las trayectorias está dada por

$$\Delta S_n = \Delta S \cdot \cos \theta. \quad (102)$$

El volumen de fluido descargado por segundo a través de " ΔS_n " es

$$\bar{q} \cdot \Delta S_n = q \cdot \Delta S \cdot \cos \theta = q_n \cdot \Delta S, \quad (103)$$

donde

$$q_n = q \cos \theta. \quad (104)$$

Entonces la descarga total a través de una superficie " ΔS ", debida a la descarga específica " q " formando un ángulo " θ " con la normal a la superficie es exactamente la misma que la descarga a través de la misma superficie debida a la descarga específica " q_n " paralela a la normal a la superficie, donde " q_n " tiene con " q " la misma relación que la componente de un vector tiene con el vector en sí. Consecuentemente, la descarga específica " q ", que tiene una magnitud y dirección definida en cada punto, es un vector, y sus componentes en todas las otras direcciones son obtenibles por los métodos usuales de resolución vectorial. El vector " q " es, en todos los lugares, tangencial a las trayectorias y por lo tanto es un vector fundamental del campo de flujo.

Otro vector de flujo igualmente importante, sin embargo, es la descarga de masa específica " j ". La dirección de ésta coincide en todos los puntos con " q " pero su magnitud es " ρq " donde " ρ " es constante para líquidos pero varía a lo largo de las trayectorias para los gases. Por lo tanto los campos vectoriales para las cantidades " q " y " j " tienen trayectorias idénticas pero magnitudes diferentes en los puntos correspondientes.

Una propiedad analítica fundamental del vector " j " es descubierta si erigimos ejes co-ordenados en el campo de flujo y elegimos un pequeño elemento de volumen macroscópico cuyas longitudes de lados son " Δx ", " Δy " y " Δz ". Descomponemos el vector " j " en componentes

" j_x ", " j_y " y " j_z " paralelas a los ejes. Determinamos entonces la masa neta de fluido que fluye "fuera del" elemento de volumen " ΔV " por unidad de tiempo.

Para hacer ósto investigamos la descarga hacia afuera a través de cada una de las seis caras del elemento de volumen. Si hacemos que " J_x ", " J_y " y " J_z " sean las descargas de masa totales hacia afuera a través de las caras "x", "y" y "z", respectivamente, tendremos

$$J_x = -j_x \Delta y \cdot \Delta z + \left(j_x + \frac{\partial j_x}{\partial x} \cdot \Delta x \right) \Delta y \cdot \Delta z = \frac{\partial j_x}{\partial x} \cdot \Delta V, \quad (105)$$

$$J_y = -j_y \Delta z \cdot \Delta x + \left(j_y + \frac{\partial j_y}{\partial y} \cdot \Delta y \right) \Delta z \cdot \Delta x = \frac{\partial j_y}{\partial y} \cdot \Delta V, \quad (106)$$

$$J_z = -j_z \Delta x \cdot \Delta y + \left(j_z + \frac{\partial j_z}{\partial z} \cdot \Delta z \right) \Delta x \cdot \Delta y = \frac{\partial j_z}{\partial z} \cdot \Delta V. \quad (107)$$

Entonces la descarga de masa neta hacia afuera, por unidad de volumen, será

$$\frac{J_x + J_y + J_z}{\Delta V} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}. \quad (108)$$

Como la masa es una propiedad conservativa de materia, el flujo neto de masa hacia afuera por unidad de tiempo por unidad de volumen debe igualar la pérdida de masa en ese tiempo por el volumen. El contenido de masa de la unidad de volumen es

$$\rho = \rho_0, \quad (109)$$

de modo que la masa perdida por unidad de volumen en unidad de tiempo debe ser

$$-\frac{dm}{dt} = -\epsilon \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (110)$$

Igualando (110) con (108) obtenemos

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = -\epsilon \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (111)$$

lo que es conocido como la "ecuación de continuidad" para el movimiento de fluidos. Establece las condiciones que los vectores del flujo deben satisfacer en todos los puntos si el principio de la conservación de la materia no debe ser violado.

Pero para el flujo estacionario " $\partial \rho / \partial t = 0$ ". Entonces para esta condición tenemos tanto para líquidos como para gases

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = \frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho q_z)}{\partial z} = c. \quad (112)$$

Para un fluido incompresible la densidad es constante, por lo que puede ser factorada fuera de la ecuación (112), quedando

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0 \quad (113)$$

como una forma especial de la ecuación de continuidad válida para líquidos solamente.

Cuando se trata con líquidos, es costumbre medir el volumen en lugar de la masa; y, como en lo que sigue nuestro interés se referirá casi exclusivamente al flujo de líquidos, emplearemos la fórmula dada en la ecuación (113) utilizando "q" como nuestro vector de flujo, a menos que se presenten casos que requieran la fórmula mas general de

la ecuación (112). Podemos pensar que la ecuación (113) expresa la constancia del volumen de fluido o, aún mejor, que define las propiedades del flujo si la condición de la constancia del volumen no debe ser violada. Esta condición hace imposible que el vector del flujo cambie caprichosa o discontinuamente con la distancia, y por lo tanto justifica nuestra estipulación anterior de continuidad en nuestro vector y campos escalares excepto al atravesar las superficies limítrofes.

Otra consecuencia de la condición de incompresibilidad, de fundamental importancia con respecto al movimiento de agua subterránea, es ésta: Si tomamos una superficie cerrada "S" que encierra a un volumen finito "V" dentro del campo de flujo, entonces el flujo dirigido hacia afuera a través de un elemento " ΔS " de la superficie, por unidad de tiempo, será

$$\Delta Q = q \cos \theta \cdot \Delta S = q_n \cdot \Delta S, \quad (114)$$

donde " θ " es el ángulo entre el vector de flujo "q" y "n", la normal a la superficie dirigida hacia afuera. Entonces la descarga neta hacia afuera a través de toda la superficie será

$$Q = \iint_S q_n \cdot dS = 0. \quad (115)$$

Esto se torna especialmente útil cuando formamos la superficie "S" de la siguiente manera: Sobre una superficie que es normal a las trayectorias dibujamos una curva cerrada que encierre un área " A_1 ". Una trayectoria particular pasa a través de cada punto de esta curva, y el "conjunto" de tales trayectorias contiguas forma una especie de manga o "tubo de corriente". Alguna distancia corriente abajo de la superficie " A_1 ", tomamos otra superficie ortogonal a las líneas de

flujo y sobre dicha superficie las trayectorias que forman las paredes del tubo de corriente circunscriben un área " A_2 ". Estos dos extremos, " A_1 " y " A_2 ", y las paredes laterales del tubo en la sección interviniente forman, juntos, una superficie cerrada, "S". Sobre el área " A_1 " el ángulo " θ " es 180° , y su coseno -1 ; sobre " A_2 ", " θ " es 0 y su coseno $+1$; sobre las paredes laterales " θ " es 90° y su coseno 0 .

Entonces para este caso la integral (115) sobre la superficie "S" se reduce a

$$Q = \iint_{A_1} -q \cdot dS + \iint_{A_2} q \cdot dS + 0 = Q. \quad (116)$$

Aún más, si el tubo es hecho suficientemente angosto, la magnitud de "q" sobre las secciones transversales "A" puede ser considerada constante, en cuyo caso la ecuación (116) se simplifica a

$$-q_1 A_1 = +q_2 A_2, \quad (116a)$$

ó, en magnitud,

$$q_1 A_1 = q_2 A_2 = qA = \text{constant}, \quad (117)$$

lo que nos dice que para un fluido incompresible en flujo estable la descarga a través de cada sección transversal de cualquier tubo de corriente dado es una constante. También, existe una relación recíproca entre descarga específica y área de la sección transversal, la primera de las cuales tiende a infinito cuando la última tiende a cero, y vice-versa.

Como una descarga específica infinita es impedida por el aumento

de resistencia con la velocidad del flujo, entonces una convergencia de un tubo de corriente a cero es imposible sin violar la condición de incompresibilidad o el principio de conservación de la materia. Consecuentemente, excepto en ciertos "puntos singulares" caracterizados por una velocidad de cero, nunca podrán intersectarse ni unirse dos trayectorias no contiguas, ya que siempre podemos elegir un tubo de corriente de forma tal que estas dos líneas se presenten diamétralmente opuestas entre sí, de modo que para unirse ambos el tubo tendría que convergir a una sección transversal de área cero.

Como la descarga a lo largo de un tubo de corriente es unidireccional y constante en su cantidad, sigue que ningún tubo de corriente de sección transversal finita puede terminar excepto sobre los límites de la región de flujo, actuando un extremo del tubo como entrada y el otro como salida. Si las líneas de flujo son radiales con respecto a una región de entrada o de salida, entonces las secciones transversales de cada tubo aumentan sin límite al aumentar la distancia desde dicha región, y la velocidad del flujo disminuye proporcionalmente, con tendencia al límite cero. Mientras este límite no puede ser alcanzado el movimiento se torna imperceptiblemente reducido, y podemos pensar que el tubo de corriente ha terminado por dispersión.

El extremo de entrada de un tubo de corriente puede ser llamado su "fuente", y la salida su "desagüe". Este empleo es ligeramente diferente del de la teoría potencial común en la que una fuente es una región donde el campo es, por así decirlo, creado, y un desagüe una región donde es aniquilado. En tal sentido, si el medio del flujo fuese trigo en su forma granular, entonces un trigal constituiría una fuente absoluta de este medio, y un molino de harina un desagüe absoluto. En esos puntos las cantidades que entren y salgan no serían las mismas, mientras que entre esos puntos la cantidad total sería conservada, y el flujo sería llamado "solenoidal".

Por nuestro tratamiento, un ejemplo de un desagüe en flujo de agua

subterránea sería un pozo hacia el cual convergen las líneas de flujo; un ejemplo de una fuente sería un lago desde el cual el agua fluye hacia el suelo. Entre la fuente y el desagüe la cantidad de fluido es conservada, y el carácter del flujo es solenoidal.

Consideremos ahora los campos de las cantidades escalares precedentemente mencionadas: la presión "p", el potencial de gravedad "U" y el potencial del fluido " ϕ ".

Tomemos primeramente la presión. A cada punto dentro del fluido le corresponderá un valor particular de la presión hidrostática "p". A través de cada punto pasa una de una familia de superficies de campo, "p" = constante, que serán conocidas como "superficies de presión igual" o "superficies isobáricas". El campo vectorial correspondiente está compuesto por los vectores grad. "p" que generan una familia de líneas de campo en todo lugar normales a las superficies isobáricas.

Por un razonamiento análogo al que nos condujo a las ecuaciones (70) y (71), si tomamos un pequeño prisma de fluido con su eje paralelo a la normal "n" de la superficie isobárica erigida en la dirección de la presión creciente, entonces la fuerza neta que actúa sobre él en la dirección "n" es

$$f_p = -\frac{\partial p}{\partial n} \cdot \Delta V = -\text{grad } p \cdot \Delta V. \quad (118)$$

La fuerza por unidad de volumen del fluido es

$$\frac{f_p}{\Delta V} = -\text{grad } p. \quad (118a)$$

Esta es la fuerza total de la presión, de la cual otra en cualquier dirección distinta es sólo una componente. Consecuentemente, en todo punto dentro del fluido actúa, debido a la gradiente de presión, una fuerza por unidad de volumen de fluido que es numéricamente igual a

grad. "p" y dirigida en sentido contrario.

Por tanto, existe una familia ortogonal de líneas de fuerza por unidad de volumen, -grad. "p" asociada con el campo escalar, en "p".

La fuerza debida a la presión por unidad de masa es

$$\frac{f_p}{\rho \cdot \Delta V} = -\frac{\mathbf{i}}{\rho} \text{grad } p; \quad (119)$$

Consideremos ahora el potencial de gravedad "U". Definiremos a esta cantidad como igual a la energía potencial de gravedad de la unidad de masa con respecto al nivel básico de elevación. Entonces, considerando a "g" como constante,

$$U = gz, \quad (120)$$

donde "g" es meramente la magnitud escalar de la aceleración de la gravedad y "z", como anteriormente, es la elevación vertical.

Las superficies de campo, "U" = constante, conocidas como "superficies equipotenciales de gravedad", obviamente corresponden a "z" = constante y son superficies planas. Las líneas de campo normales a éstas son paralelas a la dirección de la gravedad y están dadas por

$$\mathbf{g} = -\text{grad } U, \quad (121)$$

donde en este caso el vector "g" representa la fuerza por unidad de masa, ó aceleración debida a la gravedad, tanto en magnitud como en dirección.

Finalmente, para el potencial del fluido " ϕ " tenemos la familia de superficies "equipotenciales de fluido" y sus líneas de campo asociadas,

$$\frac{f_d}{m} = -\text{grad } \Phi, \quad (122)$$

donde $-\text{grad. } \Phi$ representa la fuerza por unidad de masa que actúa sobre el fluido debido a la gradiente del potencial del fluido " Φ ". Esta familia de líneas de fuerza es normal a las superficies equipotenciales de fluido y dirigidas en sentido contrario a $\text{grad. } \Phi$.

Como hemos visto ya, el potencial del fluido es la suma del trabajo efectuado contra la gravedad y la presión y es, de hecho, dado por

$$\Phi = U + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}, \quad (123)$$

donde el potencial de gravedad " U " es empleado en lugar de " gz ". Entonces, como $-\text{grad. } \Phi$ es la fuerza total actuante por unidad de masa, debe ser igual a la suma vectorial de las otras dos fuerzas componentes:

$$-\text{grad } \Phi = -\text{grad } U - \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad } p. \quad (124)$$

Los otros dos campos, así combinados en el campo único $-\text{grad. } \Phi$, pueden por lo tanto ser desestimados para otras consideraciones excepto para propósitos especiales que pudieran presentarse. Las superficies " U " = constante son horizontales y la dirección $-\text{grad. } U$ es siempre hacia abajo; los vectores $-\text{grad. } p$ y $-\text{grad. } \Phi$, sin embargo, pueden tener cualquier dirección. Únicamente en el caso especial en que

$$-\text{grad. } \Phi = 0$$

tenemos

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \text{grad } p = -(-\text{grad } U), \quad (125)$$

para el cual prevalece el equilibrio hidrostático.

Estamos ahora en una posición en que podemos elucidar las propiedades del potencial " Φ " en otra manera más. Dentro de un campo de flujo de una clase general, comenzando desde un punto inicial " P_0 ", llevemos, por un procedimiento sin fricción (movimiento infinitamente lento), un elemento del fluido de unidad de masa a lo largo de cualquier camino arbitrario "A" a una posición final "P". Bajo estas condiciones, debido al campo actuará sobre la masa en cada punto una fuerza " f_d ", y para mover el fluido deberemos ejercer sobre él una fuerza igual y opuesta " $-f_d$ ". El trabajo requerido para atravesar la distancia " ds " del camino será

$$dw = f_d \cdot ds \cdot \cos \theta, \quad (126)$$

donde la cantidad a la derecha es el producto del desplazamiento por la componente de fuerza en esa dirección, y " θ " es el ángulo entre la dirección del desplazamiento y la de la fuerza " $-f_d$ ". Pero

$$f_d \cdot ds \cdot \cos \theta = \left(\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} \right) ds = dw. \quad (127)$$

Entonces el trabajo total requerido para transportar la masa a lo largo del camino "A" desde " P_0 " hasta "P" es

$$w_A = \int dw = \int_A \left(\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} \right) ds, \quad (128)$$

donde \int_A representa la integral de la línea a lo largo del camino "A".

Seguidamente, supongamos que llevamos una unidad de masa desde "P₀" hasta "P" a lo largo de un camino diferente "B". El trabajo requerido para hacer ésto será

$$w_B = \int_B \left(\frac{\partial U}{\partial s} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} \right) ds. \quad (129)$$

Entonces, si " w_A " es igual a " w_B " para todos los caminos posibles "A" y "B", podemos caracterizar al fluido en el punto "p" por su posesión de una cantidad únicamente determinable de energía mecánica " ϕ " por unidad de masa definida por

$$\phi = \phi_0 + w = \phi_0 + \int \left(\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \right) ds, \quad (130)$$

donde " ϕ_0 " es la cantidad correspondiente en el punto "P₀". Si, por el contrario, el valor de la integral de la línea desde "P₀" hasta "P" es diferente por distintos caminos, entonces " $w_A \neq w_B$ ", y la cantidad " ϕ " definida por la ecuación (130) no es única. En el primer caso, donde la integral de la línea es única, decimos que el campo tiene un potencial; en el segundo caso, no es posible ningún potencial.

El criterio más rígido para la existencia de un potencial es obtenido si recorremos un camino cerrado, yendo desde "P₀" hasta "P" por el camino "A" y regresando por "B". Entonces el trabajo total a lo largo del camino cerrado es

$$w = w_A + w_B = \oint \left(\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} \right) ds. \quad (131)$$

Si esta integral de línea alrededor de todos los caminos cerrados posibles es igual a cero, existe un potencial, y a cada punto en el

campo le corresponde un valor únicamente determinable de la cantidad " Φ ". Si esta integral alrededor de un camino cerrado no es cero, no es posible ningún potencial, y habrá un componente circulatorio del flujo de fluido alrededor de este camino. Esto no implica movimiento perpetuo pero indica la presencia de una máquina térmica, donde el calor está siendo agregado a una temperatura en una parte del circuito y retirado a una temperatura menor en otra.

Interpretando la ecuación (131) mecánicamente, sabemos ya que el trabajo contra la gravedad es independiente del camino, de modo que

$$\oint \frac{\partial U}{\partial s} \cdot ds = 0. \quad (132)$$

Entonces, si vamos a tener un potencial de fluido, es también necesario que

$$\oint \frac{\vec{T}}{\rho} \cdot \frac{\partial \vec{L}}{\partial s} \cdot ds = 0, \quad (133)$$

lo que es completamente satisfecho cuando la densidad " ρ " es determinada únicamente para cada valor de la presión. Esta condición es satisfecha para fluidos incompresibles para los cuales la densidad es constante y para transformaciones de gases isotermales o adiabáticas. Para líquidos bajo un gradiente de temperatura puede en realidad haber una ligera componente rotacional debido a cambios de densidad con la temperatura, pero en agua subterránea éste es ordinariamente de una magnitud negligible comparada con las fuerzas potenciales que actúan.

La ecuación (130) se transforma a nuestra definición anterior de potencial de fluido deducida por razonamiento termodinámico cuando " P_0 " está situado en un punto " z " = 0 con una presión de " p_0 ", y

" ϕ_0 " = 0. Entonces en el punto "P"

$$\phi = \int_{u_0}^u dU + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = gz + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}, \quad (134)$$

donde la cantidad a mano derecha es nuestra definición original del potencial del fluido.

Los potenciales son clasificados de acuerdo a la cantidad vectorial a la que están relacionados. Por tanto, una cantidad escalar, la derivativa espacial de cuyo campo es una fuerza, es llamada una "potencial de fuerza"; si la derivativa espacial es una velocidad, la cantidad es una "potencial de velocidad". Como la derivativa espacial de la cantidad " ϕ " es una fuerza, " ϕ " debe ser una potencial de fuerza.

9. RELACION ENTRE EL CAMPO POTENCIAL Y EL CAMPO DE FLUJO.

Hasta ahora hemos investigado separadamente las propiedades de los campos de flujo cuyos vectores son " q " y " j ", respectivamente, y del campo escalar del potencial del fluido y su campo de fuerza asociado -grad. " ϕ ". Estos campos coexisten en la misma región del espacio, y nuestro problema ahora es relacionarlos entre sí. Esto se logra directamente por medio de la Ley de Darcy, de la cual podemos emplear cualquiera de las formas equivalentes

$$\left. \begin{aligned} q_s &= -\sigma \cdot \frac{\partial \phi}{\partial s} \\ j_s &= -\rho \sigma \cdot \frac{\partial \phi}{\partial s} \end{aligned} \right\} \quad (135)$$

donde " q_s " y " j_s " son las componentes en la dirección "s" de la descarga de volumen específica y de la descarga de masa, respectivamente.

Los vectores de flujo total, de los cuales éstos son las componentes, son igualmente dados por

$$\left. \begin{aligned} q &= -\sigma \text{ grad } \bar{\Phi}, \\ j &= -\rho\sigma \text{ grad } \bar{\Phi}, \end{aligned} \right\} \quad (135a)$$

que pueden ser tomados como expresiones generales equivalentes de la Ley de Darcy. En éstos los vectores "q" y "j" son en todo lugar paralelos entre sí y a las trayectorias, y la magnitud de "j" es igual a la de "q" multiplicada por el factor " ρ ".

La relación de los vectores "q" y "j" al de $-\text{grad. } \bar{\Phi}$ puede ser vista mejor recordando que " $\sigma = k\rho/\eta$ " y que cada una de estas cantidades es una variable posible en el campo de flujo. Si el valor de "k" cambia de punto a punto, el medio no es homogéneo; y si varía en el mismo punto para flujo en direcciones diferentes, no es isotrópico.

Para medios isotrópicos las direcciones de "q" y de "j" serán las mismas que la de $-\text{grad. } \bar{\Phi}$; y sus magnitudes serán " σ " y " $\rho\sigma$ ", respectivamente, veces la de $-\text{grad. } \bar{\Phi}$, y las líneas de flujo serán normales a las superficies equipotenciales. Para condiciones no isotrópicas las líneas de flujo serán, en general, algo oblicuas a la dirección de $-\text{grad. } \bar{\Phi}$.

Para el fluido general, " ρ " variará como una función de la presión, y " η " como una función de la temperatura, y ambas como una función de distancia en el campo de flujo, a pesar de que para líquidos a temperatura constante esta variación se torna negligiblemente pequeña. Como hemos acordado considerar solamente medios isotrópicos, las líneas de flujo que trataremos serán en todo lugar paralelas a $-\text{grad. } \bar{\Phi}$ y formarán un sistema ortogonal con la familia de superficies equipotenciales " $\bar{\Phi} = \text{constante}$ ". No podemos, sin embargo, suponer homogeneidad, ya que en rocas el valor de "k" varía desde cero para materiales impermeables hasta infinito para grandes espacios abiertos.

Para un fluido de densidad y viscosidad constantes fluyendo a través de rocas con estructuras internas similares, " σ " varía como " k ", o como el cuadrado del diámetro granular o de otra longitud característica. Entonces, para diámetros granulares limitados entre 10^{-3} y 1 cm., correspondientes a la amplitud de los sedimentos desde fango hasta ripio grueso, el aumento de permeabilidad y conductividad es del orden de un millón de veces. Es altamente importante, por lo tanto, que desarrollemos nuestra teoría para permitirnos tomar en cuenta grandes diferencias de permeabilidad.

Podemos aquí dirigir nuestra atención a una consecuencia importante de la amplia variación de " σ ", que será discutida en mayor detalle más adelante. Existe un empleo extenso entre autores sobre esta materia de una expresión de la forma

$$q = -\text{grad}(\sigma\Phi), \quad (136)$$

que es expuesta como la Ley de Darcy. La comparación de ésta con la ecuación (135a) muestra que, para que ósto sea cierto, $\text{grad}(\sigma\Phi)$ debe ser igual a " σ " $\text{grad} \Phi$ ". En realidad, sin embargo, si expandimos $\text{grad}(\sigma\Phi)$, obtenemos

$$\text{grad}(\sigma\Phi) = \sigma \text{grad} \Phi + \Phi \text{grad} \sigma; \quad (136a)$$

de lo que se desprende claramente que las ecuaciones (135a) y (136) pueden ser equivalentes solamente si " $\Phi \text{grad} \sigma$ " = 0. Esta última condición es satisfecha solamente en caso de " $\sigma = k\rho\gamma\eta$ " = constante. Por lo tanto, para medios no homogéneos o para fluidos de densidad ó viscosidad variables -es decir, para condiciones generales- la ecuación (136) debe ser desechada como una expresión de la Ley de Darcy, en base a que es físicamente errónea.

10. REFRACCION DE LINEAS DE FLUJO A TRAVES DE LIMITES ENTRE MEDIOS DISTINTOS.

Con este punto aclarado procedamos ahora a investigar el flujo de un líquido a través de medios no homogéneos. Consideremos primeramente el caso de flujo a través del límite entre regiones de conductividad marcadamente diferente. Hagamos que " σ_1 " sea la conductividad de la primera región, y " σ_2 " la de la segunda. La superficie de contacto será una superficie plana cuyas normales hacia las dos regiones son " n_1 " y " n_2 ". " θ_1 " y " θ_2 " son los ángulos que las líneas de flujo forman con las normales en la primera y segunda región, respectivamente; " q_1 " y " q_2 " son los vectores de flujo correspondientes.

En el límite entre estas dos regiones dos requisitos físicos independientes deben ser satisfechos simultáneamente. El principio de conservación de la materia requiere que el fluido que deja una región por unidad de tiempo debe ser igual al que entra en la otra. Como ésto comprende solo componentes normales del flujo

$$-(q_n)_1 = +(q_n)_2 \quad (137)$$

donde " $(q_n)_1$ " y " $(q_n)_2$ " representan los componentes normales de flujo "alejándose" del límite hacia las dos regiones, respectivamente.

El principio de conservación de la energía requiere que la integral de línea del potencial alrededor de un camino cerrado, comenzando en un punto sobre el límite, recorriendo una distancia " Δs " a lo largo del límite dentro de la región 2, y regresando a lo largo de un camino paralelo apenas dentro de la región 1, debe ser cero. Por lo tanto,

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial s}\right)_1 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial s}\right)_2 \quad (138)$$

Si efectuamos estas operaciones en el plano que contiene a las dos normales a la superficie " n_1 " y " n_2 ", y a los dos vectores de flujo " q_1 " y " q_2 ", y expresamos los índices de flujo en términos de las gradientes potenciales y de las conductividades, tendremos para los componentes normales del flujo

$$\sigma_1(\text{grad } \Phi)_1 \cos \theta_1 = \sigma_2(\text{grad } \Phi)_2 \cos \theta_2; \quad (139)$$

y para las componentes tangenciales de la gradiente potencial,

$$(\text{grad } \Phi)_1 \sin \theta_1 = (\text{grad } \Phi)_2 \sin \theta_2. \quad (140)$$

Dividiendo la ecuación (140) por (139) nos dá

$$\frac{\sin \theta_1}{\sigma_1 \cos \theta_1} = \frac{\sin \theta_2}{\sigma_2 \cos \theta_2}, \quad (140a)$$

o

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\frac{k_1 \rho_1}{\eta_1}}{\frac{k_2 \rho_2}{\eta_2}} = \frac{k_1}{k_2} \quad (141)$$

lo que puede ser tomado como la ley de refracción de las líneas de flujo en flujo de fluidos. En el límite entre medios de diferentes permeabilidades, tanto las líneas de flujo como las superficies equipotenciales cambian dirección abruptamente. Esto se asemeja a la refracción de la luz excepto en que esta última obedece a una ley senoidal en lugar de una ley tangencial de refracción. Debe subrayarse, sin embargo, que esta ley de refracción es verdadera solo cuando ambos medios están completamente llenados con el mismo fluido.

Los dos casos de mayor importancia son aquellos para los cuales, mientras una de las conductividades, digamos " σ_1 ", permanece finita, la otra se aproxima ya sea a cero o a infinito. Las consecuencias de esto son mejor reveladas por las ecuaciones (139) y (140). Cuando " $\sigma_2 \rightarrow 0$ ", la ecuación (139) se convierte en

$$\sigma_1 (\text{grad } \Phi)_1 \cos \theta_1 = 0. \quad (142)$$

Cuando " $\sigma_2 \rightarrow \infty$ ", $(\text{grad. } \Phi)_2 \rightarrow 0$ y la ecuación (140) se convierte en

$$(\text{grad } \Phi)_1 \sin \theta_1 = 0. \quad (143)$$

Como tanto " σ_1 " como $(\text{grad. } \Phi)_1$ son finitas, entonces en el primer caso $\cos. \theta_1 = 0$, y en el segundo, $\sin. \theta_1 = 0$, correspondiendo a $\theta_1 = 90^\circ$ y $\theta_1 = 0^\circ$ en el primero y segundo casos, respectivamente.

Por lo tanto, en una región de permeabilidad finita, las superficies equipotenciales terminan perpendicularmente sobre todos los límites impermeables; mientras que sobre límites permeables con regiones de conductividades infinitas (grandes vacíos) llenadas con el mismo fluido, todas las líneas de flujo terminan perpendicularmente.

Que esto debe ser así resulta más obvio cuando consideramos que, sobre límites impermeables, las componentes normales del flujo son cero, de modo que el flujo total al cual son perpendiculares las superficies equipotenciales, es la componente tangencial. Para el caso de flujo hacia un vacío o piletta llena de fluido, el índice de flujo es finito, pero la conductividad es esencialmente infinita. Entonces, como " $q = -\sigma \text{grad. } \Phi$ ", sigue que $\text{grad. } \Phi$ debe tender a cero mientras " Φ " aumenta sin límite. Una región tal se aproxima a la condición " $\Phi = \text{constante}$ ", o se vuelve esencialmente una región

equipotencial. Como las componentes tangenciales de la gradiente potencial a ambos lados del límite deben ser las mismas, y en este caso cero, entonces el flujo total en la región de conductividad finita debe ser su componente normal.

11. FLUJO DESDE PUNTO-FUENTE Y LINEA-FUENTE.

Cuando tratamos el campo de flujo solamente y discutimos los tubos de flujo, establecimos en la ecuación (118) el hecho de que la descarga total de volumen a lo largo de cualquier tubo de corriente dado era constante, de modo que, al contraerse el tubo, la velocidad del flujo, o descarga específica "q", debía aumentar proporcionalmente. Ahora, cuando relacionamos el índice de flujo con la gradiente potencial, obtenemos

$$qA = -Ks \text{ grad } \phi, \quad (144)$$

lo que nós dice que, al contraerse cualquier tubo de corriente en una región de conductividad uniforme, la gradiente potencial aumenta correspondientemente, y que superficies equidiferentes de potencial constante se agrupan correspondientemente, acercándose entre sí. Por lo tanto, en cualquier región donde las trayectorias convergen, la gradiente potencial aumentará en la dirección de la convergencia en proporción al aumento de "q".

Dos casos de tal convergencia son de considerable importancia por la facilidad de su cálculo y porque son frecuentemente aproximados en la práctica. Uno de ellos es el flujo desde o hacia una línea-desagüe o línea-fuente, donde las líneas de flujo son todas normales a la línea y radiales con respecto a ella como centro. El flujo radial hacia un pozo que se extienda desde arriba hasta abajo de un acuífero con límites superiores o inferiores impermeables es un ejemplo de este tipo de flujo. El flujo desde una región de permeabilidad uniforme

hacia una zanja de desagüe es, en algunos casos, una buena aproximación.

El otro caso es el flujo radial desde o hacia un punto-fuente o punto-desagüe a través de medios de permeabilidad uniforme.

Para cada uno de estos dos tipos de flujo determinemos ahora tanto la magnitud de la descarga específica "q" como el potencial " ϕ " en todos los puntos del campo. Para esto consideraremos que la descarga es positiva cuando el flujo parte de una fuente hacia afuera, y negativa cuando es dirigido hacia adentro a un desagüe.

Consideremos el caso cuando el flujo es radialmente hacia afuera de una línea-fuente. Representemos ésta por un cilindro de longitud infinita y radio " r_0 ". El potencial en la superficie del cilindro será " ϕ_0 ". Consideremos seguidamente la descarga de volumen " dQ " a través de un tubo de flujo subtendido sobre el cilindro una longitud " $d\ell$ " y un ángulo circunferencial " $d\theta$ ". A la distancia " r_0 " el área de la sección transversal de este tubo será

$$dA_0 = r_0 \cdot d\theta \cdot d\ell, \quad (145)$$

y a una distancia "r" se convertirá en

$$dA = r \cdot d\theta \cdot d\ell. \quad (146)$$

Como la descarga a través de todas las secciones transversales del tubo es constante, entonces

$$d = q_0 r_0 \cdot d\theta \cdot d\ell = q r \cdot d\theta \cdot d\ell, \quad (146a)$$

$$q = q_0 \cdot \frac{r_0}{r}, \quad (147)$$

lo que indica que el índice de flujo disminuye inversamente como la primera potencia de la distancia.

El potencial es obtenido introduciendo la Ley de Darcy en la ecuación (147)

$$q = q_0 r_0 \cdot \frac{I}{r} = -\sigma \cdot \frac{d\Phi}{dr}, \quad (148)$$

de la que

$$d\Phi = -\frac{q_0 r_0}{\sigma} \cdot \frac{dr}{r} \quad (148a)$$

y

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{q_0 r_0}{\sigma} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r} = \Phi_0 - \frac{q_0 r_0}{\sigma} \cdot \log_e \frac{r}{r_0}. \quad (149)$$

En caso de que el flujo sea hacia adentro de un desagüe, "q₀" es negativa, así que el último término de la ecuación (149) se vuelve positivo.

Sobre un ángulo finito "θ" y longitud "l" la descarga total "Q" es

$$Q = q_0 r_0 l; \quad (150)$$

y cuando el flujo es desde todos los lados, "θ" es 2π radianes, dando

$$Q = 2\pi q_0 r_0 l, \text{ or } q_0 r_0 = \frac{Q}{2\pi l} \quad (151)$$

Remplazando " $q_0 r_0$ " en la ecuación (149) por " $Q/2\pi l$ " resulta

$$\phi = \phi_0 - \frac{Q}{2\pi \sigma l} \cdot \log_e \frac{r}{r_0}, \quad (152)$$

mostrando que para este caso el potencial disminuye o aumenta, dependiendo de si el flujo es hacia afuera o hacia adentro, logarítmicamente con la distancia.

Consideremos seguidamente el flujo radial desde un punto-fuente al que tomaremos como el centro de una esfera equipotencial de radio " r_0 " y potencial " ϕ_0 ". Hagamos que " $d\Omega$ " sea un ángulo sólido elemental cuya área de sección transversal a una distancia " r_0 " sea " dA_0 ", y " dA " a una distancia " r ". A través de él la descarga es

$$dQ = q_0 \cdot dA_0 = q \cdot dA = q_0 r_0^2 \cdot d\Omega = q r^2 \cdot d\Omega. \quad (153)$$

Por lo tanto,

$$q = q_0 r_0^2 \frac{\Omega}{r^2}, \quad (154)$$

lo que muestra que en este caso la intensidad del flujo varía con el cuadrado inverso de la distancia. Por la Ley de Darcy

$$q = -\sigma \cdot \frac{d\phi}{dr} = q_0 r_0^2 \cdot \frac{\Omega}{r^2}, \quad (155)$$

de lo que

$$d\Phi = -\frac{q_0 r_0^2}{\sigma} \cdot \frac{dr}{r^2} \quad (155c)$$

y

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{q_0 r_0^2}{\sigma} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2} = \Phi_0 + \frac{q_0 r_0^2}{\sigma} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right). \quad (156)$$

Para descarga hacia adentro el signo de " q_0 " se vuelve negativo, cambiando el signo del último término.

Para flujo de esta clase el flujo comunmente se produce sobre una mitad o la totalidad del espacio alrededor del punto. Para medio espacio la descarga total es

$$Q = 2\pi r_0^2 q_0, \quad (157)$$

y para todo el espacio

$$Q = 4\pi r_0^2 q_0, \quad (158)$$

de lo que

$$q_0 r_0^2 = \frac{Q}{2\pi} \quad \text{y} \quad \frac{Q}{4\pi}, \quad (159)$$

que depende de cuál de los dos casos está siendo tratado. Tomando el primero, que corresponde a flujo desde o hacia un punto sobre un límite plano impermeable de un medio de permeabilidad uniforme y gran extensión, e introduciendo ésto en la ecuación (156), obtenemos

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{Q}{2\pi c} \left(\frac{r}{r} - \frac{r}{r_0} \right). \quad (160)$$

En uno u otro caso, hagamos que " Φ_1 " sea el potencial en un punto " P_1 " de distancia radial " r_1 ", y " Φ_2 " el de un punto " P_2 " de distancia " r_2 ". Entonces para flujo hacia una línea-desagüe, por ecuación (152),

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_0 - \frac{Q}{2\pi d} \log_e \frac{r_1}{r_0}, \\ \Phi_2 &= \Phi_0 - \frac{Q}{2\pi d} \log_e \frac{r_2}{r_0}, \end{aligned} \right\} \quad (161)$$

y

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \frac{Q}{2\pi d} \log_e \frac{r_1}{r_2} = g(h_2 - h_1), \quad (162)$$

donde " h_2 " y " h_1 " son las alturas manométricas en los puntos " P_2 " y " P_1 ".

Extrayendo de la ecuación (162) a " " resulta

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi l g(h_2 - h_1)} \log_e \frac{r_1}{r_2} = \frac{K P}{\eta}, \quad (163)$$

donde "K" es la permeabilidad del medio. Las alturas " h_2 " y " h_1 " pueden ser las elevaciones del agua en dos pozos de observación, mientras "Q" es la descarga constante de un pozo de bombeo.

Para flujo radial a través de medio espacio hacia un punto tenemos de la ecuación (160)

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_0 + \frac{Q}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right), \\ \Phi_2 &= \Phi_0 + \frac{Q}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_0} \right), \end{aligned} \right\} \quad (164)$$

y

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \frac{Q}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = g(h_2 - h_1). \quad (165)$$

Extrayendo "Q" de esto tenemos

$$= \frac{Q}{2\pi\sigma g(h_2 - h_1)} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{hP}{\eta}. \quad (166)$$

Las ecuaciones (163) y (166) nos dan un medio para determinar la permeabilidad en un campo cuando existen dos sistemas de flujo aproximados a los que originaron el desarrollo de las dos ecuaciones. Thiem (10) parece haber sido el primero en utilizar este principio para medir la permeabilidad, y podemos llamarlo el "Método de Thiem", a pesar de que el método de análisis aquí empleado difiere marcadamente del utilizado por él, y de que uno solo de los casos aquí usados, el del flujo hacia una línea-desagüe, fue considerado por él.

El principio no está en absoluto confinado a los casos tratados; es aplicable a cualquier sistema de flujo para el cual sea posible deducir teóricamente el campo potencial y el campo de flujo de las condiciones conocidas de los límites. Los casos anteriores fueron elegidos solamente como una ilustración.

Wenzel (11) ha hecho uso recientemente del Método de Thiem para

mediciones de permeabilidad en los Estados Unidos.

Otra propiedad importante del campo de flujo deriva del principio de superposición. Por ejemplo, supongamos que tenemos dos puntos-fuentes en los puntos " O_1 " y " O_2 " separados por una distancia " a ", dentro de un medio de permeabilidad uniforme cuya extensión en todas las direcciones es grande, comparada con " a ". Hagamos que la descarga desde uno de ellos sea " Q_1 " y desde el otro " Q_2 ". Si solamente funciona la fuente " Q_1 ", entonces todas las líneas de flujo se extenderán radialmente desde " O_1 ", y en " $P(r_1, r_2)$ " el vector de flujo tendrá la magnitud

$$q_1 = \frac{Q_1}{4\pi r_1^2} \quad (167)$$

y una dirección paralela a " r_1 ".

Si solamente funciona la fuente " Q_2 ", todas las líneas de flujo radiarán desde " O_2 " y en " $P(r_1, r_2)$ " la magnitud del vector de flujo será

$$q_2 = \frac{Q_2}{4\pi r_2^2} \quad (168)$$

y su dirección será paralela a " r_2 ".

Si tanto " Q_1 " como " Q_2 " funcionan simultáneamente, entonces " q_1 " y " q_2 " serán las dos componentes del flujo, y el flujo resultante será la suma vectorial

$$q = q_1 + q_2 \quad (169)$$

Para obtener las líneas de flujo resultantes en todo el campo por

este método tendríamos que repetir las operaciones de las ecuaciones (167), (168) y (169) para un gran número de puntos en el espacio antes de poder dibujarlos -un procedimiento muy difícil y tedioso.

Supongamos, sin embargo, que consideramos los potenciales en el punto "P(r_1, r_2)" debidos a cada fuente funcionando sola, y después a las dos juntas. Para " Q_1 " solamente

$$\Phi_1 = \Phi_{10} + \frac{Q_1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{10}} \right), \quad (170)$$

y para " Q_2 " solamente

$$\Phi_2 = \Phi_{20} + \frac{Q_2}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_{20}} \right). \quad (171)$$

Entonces para ambas fuentes funcionando simultáneamente tendríamos que tener

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2. \quad (172)$$

Pero en este caso los potenciales son cantidades escalares y por lo tanto se suman algebraicamente, dándonos

$$\Phi = \Phi_{10} + \Phi_{20} + \frac{Q_1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{10}} \right) + \frac{Q_2}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_{20}} \right), \quad (173)$$

por cuyo intermedio obtenemos el potencial para cada punto "P(r_1, r_2)" en el espacio. Las líneas de flujo son entonces normales a las superficies " Φ " = constante en todos los lugares.

En el caso de que " Q_1 " sea una fuente y " Q_2 " un desagüe igual, con " Φ_{20} " = " $-\Phi_{10}$ " y " r_{20} " = " r_{10} ", la ecuación (172) se reduce a

$$\bar{\phi} = \frac{C}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad (174)$$

cuya gradiente define un campo de flujo igual con las líneas de fuerza alrededor de una barra magnética idealizada o con las líneas de flujo de una corriente eléctrica entre puntos-electrodos a través de un espacio de conductividad eléctrica uniforme.

Por una generalización de este procedimiento el potencial resultante en cada punto es siempre la suma de los potenciales parciales debidos a causas separadas:

$$\bar{\phi} = \bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_2 + \bar{\phi}_3 + \dots + \bar{\phi}_n, \quad (175)$$

y siempre

$$q = -\sigma \text{ grad } \bar{\phi}. \quad (176)$$

Ya hemos demostrado que sobre todos los límites impermeables de una región de flujo, las superficies equipotenciales terminan perpendicularmente. Queda por verse de qué otra forma pueden terminar esas superficies. Por ejemplo, puede una superficie equipotencial cerrarse completamente sobre sí misma, encerrando un volumen de la región de flujo? Puede una superficie equipotencial terminar dentro de una región de flujo lejos de todos los límites? Pueden intersectarse entre sí o coincidir dos superficies equipotenciales?

Al considerar estos problemas mantengamos en mente que estamos suponiendo la presencia de un único fluido homogéneo de densidad sensiblemente constante, de modo que en el campo de flujo todos los espacios estén ocupados por el fluido. Los límites del campo de flujo pueden ser permeables o impermeables. El campo de flujo así definido

constituye un volumen cerrado a cuyo través el flujo debe satisfacer la ecuación (116), que establece que el flujo neto hacia afuera a través de los límites debe ser cero. Consecuentemente, en una región tal todos los tubos de flujo deben terminar sobre los límites permeables, un término sobre una entrada de fluido o fuente y el otro sobre una salida de fluido o desagüe. En todos los puntos dentro de la región el flujo es solenoidal, es decir, desprovisto de fuentes o desagües absolutos.

Una de las propiedades fundamentales de una superficie equipotencial es que separa una región de mayor potencial de otra de potencial menor. Consecuentemente, a través de cualquier superficie dada el flujo siempre tiene lugar en la misma dirección, es decir, una línea de flujo individual nunca cruza dos veces la misma superficie equipotencial. Si una superficie equipotencial se cerrase sobre sí misma completamente, tendríamos entonces un volumen hacia el cual o desde el cual todas las líneas de flujo convergerían o divergirían.

Pero esto podría ser posible únicamente si el volumen encerrado fuese una región en la que el fluido fuese aniquilado o creado -una región que contuviese desagües o fuentes absolutos. Como la existencia de éstos ha sido ya descartada, entonces podemos decir que en el flujo de un fluido incompresible es imposible que una superficie equipotencial termine sobre sí misma y encierre completamente algún volumen dado de espacio.

Lo mismo es cierto con respecto al flujo estable de un fluido comprimible, solo que en este caso las ecuaciones de continuidad se aplican al vector "j" de descarga de masa en lugar de la descarga de volumen "q", de modo que una superficie equipotencial completamente cerrada para el movimiento estable de cualquier clase de fluido implicaría una violación al principio de conservación de la materia.

Los que hemos denominado aquí "desagües" y "fuentes" dentro de una región de flujo son realmente conseguidos por un arreglo adecuado de

los límites impermeables. Conseguimos algo aproximado a un punto de salida dentro de una región de flujo al terminar un tubo en ese punto. Lo que en realidad habremos hecho será extender los límites impermeables en la forma de un cilindro hueco hasta el punto dado. Si el flujo es desde el medio hacia el extremo del tubo, entonces todas las superficies equipotenciales cercanas se cierran completamente alrededor de este punto, excepto el área de sección transversal del tubo. Pero esta es la superficie (área) de salida del fluido, y el potencial dentro del tubo es marcadamente diferente del potencial inmediatamente fuera del mismo. Consecuentemente, aún en este caso, las superficies no pueden cerrarse pero deben terminar perpendicularmente sobre los límites impermeables del tubo.

Pueden las superficies equipotenciales terminar dentro de la región de flujo, alejadas de todos los límites? Deben existir superficies equipotenciales en todos los puntos para los que hay un gradiente potencial y, por lo tanto, para los que el fluido está en movimiento. Si una superficie equipotencial terminase lejos de todos los límites, esto implicaría que hemos ido de una región en la que el fluido estaba en movimiento a una en que el fluido estaba completamente estacionario y, por lo tanto, a potencial constante. Si una región equipotencial tal existiese adyacente a una región donde el fluido estuviese en movimiento, tendríamos entonces superficies equipotenciales diferentes terminando sobre esta región estancada. Esto nos permitiría llevar una masa unidad de fluido desde un punto sobre una superficie equipotencial " Φ_1 " a lo largo de esta superficie hacia dentro de la región estancada y desde allí a una superficie de mayor potencial " Φ_2 " con trabajo cero. Entonces, llevándola directamente de regreso a su punto inicial resultaría un trabajo positivo " Φ_2 " - " Φ_1 ". De esta manera lograríamos un mecanismo de movimiento perpetuo y violaríamos el principio de conservación de la energía. Es aquí debemos llegar a la conclusión de que ninguna superficie

equipotencial puede terminar de esta manera y debe continuar hasta un límite. Un corolario de ésto es que en una región ocupada por un fluido homogéneo es imposible tener una parte del fluido en movimiento y otra parte estancada, excepto cuando las dos partes están separadas por límites impermeables -una proposición de alguna significancia con respecto a ciertas teorías de deposición de minerales.

Pueden intersectarse o coincidir dos superficies equipotenciales? Hagamos que una de estas tenga el valor " Φ " y la otra " $\Phi + \Delta\eta$ ". La distancia entre ambas a lo largo de la línea de flujo será " Δn ". Entonces, por la Ley de Darcy,

$$q = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \left(-\sigma \frac{\Delta\Phi}{\Delta n} \right). \quad (177)$$

Como " $\Delta\Phi$ " es la diferencia de potencial constante entre las dos superficies, entonces al irse aproximando entre sí, " $\Delta\eta$ " se acercaría a cero y " $\Delta\Phi/\Delta n$ " se transformaría en infinito, correspondiendo a un valor infinito de " q ". Por lo tanto, en todos los puntos donde el vector de flujo " q " es finito, no puede coincidir ni intersectarse ningún par de superficies equipotenciales diferentes.

Se producen excepciones a ésto en ciertos "puntos singulares" en la región de flujo, de las que un ejemplo es el flujo alrededor de un ángulo exterior agudo de un límite impermeable. Al aproximarse al ángulo, las superficies equipotenciales diferentes, que son normales a cada una de las caras, se acercan a un punto de coincidencia. En la vecindad inmediata de ese punto la velocidad aumenta marcadamente, y la Ley de Darcy pierde su validez.

12. LOS LÍMITES ENTRE FLUIDOS NO HOMOGÉNEOS.

Hasta ahora hemos tratado solamente el flujo de un fluido homogéneo único a través de una región en la que todos los espacios estaban

supuestamente llenados por completo de ese fluido. Por nuestro tratamiento un fluido homogéneo es uno tal que su densidad es solamente una función de la presión. Continuando este empleo, queremos ahora investigar la superficie limítrofe entre dos fluidos homogéneos diferentes pueden ser inmiscibles, como agua y aceite, o miscibles en todas las proporciones, como agua y alcohol. Donde son inmiscibles, su superficie de contacto es una discreta superficie de separación; donde son miscibles, no existe tal superficie precisa, pero su lugar es tomado por una zona de difusión.

Para fluidos inmiscibles con sus discretas superficies de separación existe una cantidad de energía superficial donde los dos fluidos están en contacto mutuo, y también otras energías superficiales entre cada uno de los fluidos separadamente y el medio sólido. Estas dan lugar a fuerzas capilares que actúan como una influencia modificatoria sobre un equilibrio que existiría si tales fuerzas no existiesen. En muchos casos el efecto de estas influencias modificatorias de capilaridad no es de gran importancia; en otros casos, especialmente en lo que se refiere a las relaciones aceite-agua de la producción petrolífera, su efecto parece ser nada negligible.

En problemas de agua subterránea las energías superficiales son efectivas a lo largo de los contactos agua-aire pero no están presentes a lo largo de los contactos agua dulce-agua salada. Para una mayor simplicidad supondremos primeramente que las fuerzas capilares no existen, y más adelante introduciremos sus efectos como una influencia modificatoria sobre los resultados hasta entonces obtenidos.

Cuando tratamos con un solo fluido tuvimos que considerar solo un potencial único. Al tratar con varios fluidos tendremos tantos potenciales como fluidos. Definiremos éstos de manera tal que las definiciones serán válidas en todos los puntos en el espacio que no estén ocupados por un sólido impermeable. Por lo tanto, en cada punto en el espacio, sin considerar cuál fluido ocupa ese espacio, habrá un valor

particular de cada uno de los varios potenciales. También habrá un campo escalar completo en cada potencial en toda la región de espacio considerada. En adición a ésto, cada fluido ocupará un dominio particular suyo propio con una superficie de contacto entre regiones adyacentes ocupadas por fluidos diferentes.

Para tratar con este sistema más complejo debemos generalizar un poco nuestra notación si queremos evitar ambigüedades y confusiones. Debemos poder distinguir los potenciales de los varios fluidos diferentes y los valores particulares asignados a cada uno. En adición a ésto debemos distinguir las regiones separadas ocupadas por los diferentes fluidos. Los dos primeros requisitos son cumplidos por el uso de dos sub-índices, de los que el primero identificará al fluido en cuestión, y el segundo, el valor particular asignado. Por lo tanto " Φ_{ij} ", donde "i" y "j" son 1, 2, 3, ..., significa el "j" . valor particular del potencial del fluido "i". Cuando no se quiera expresar ningún valor particular, el segundo sub-índice será omitido. Frecuentemente será necesario mostrar que una operación dada debe ser efectuada en una región ocupada por un fluido específico. Esto será indicado por $()_k$, donde los paréntesis encierran la operación y "k" = 1, 2, 3, indica el fluido en cuya región debe efectuarse. Entonces $(\text{grad. } \Phi)_2)_1$ indica la gradiente del potencial del fluido 2 en la región ocupada por el fluido 1.

El potencial del fluido "i" en cualquier punto dado será

$$\Phi = U + \int_{r_0}^r \frac{dp}{\rho_i}, \quad (178)$$

donde " ρ_i " es su densidad. Para líquidos ésto se simplifica a

$$\Phi_i = U + \frac{p - p_0}{\rho_i}. \quad (179)$$

En y cerca de la superficie de la tierra, la gravedad es suficientemente casi constante y podemos establecer "U=gz". Entonces

$$\Phi_i = gz + \frac{p - p_0}{\rho_i}. \quad (180)$$

También,

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial s} = g \cdot \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{1}{\rho_i} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} \quad (181)$$

y

$$-\text{grad } \Phi_i = +g - \frac{1}{\rho_i} \text{grad } p \quad (182)$$

Esta última ecuación es una ecuación vectorial, y cada uno de sus términos es una fuerza por unidad de masa que actuaría sobre un elemento del fluido "i" colocado en el punto especificado. Es importante observar que, mientras en un punto dado tanto "g" como "-grad. p" son vectores con magnitudes y direcciones fijas, el vector "-1/ρ_i grad. p" tiene una dirección fija pero una magnitud variable, dependiente de la densidad del fluido, "ρ_i". Consecuentemente, para elementos de fluidos de diferentes densidades ubicados en el mismo punto, las fuerzas impulsoras por unidad de masa, "-grad. Φ_i", serán siempre de magnitudes diferentes y, en general, con direcciones distintas. Similarmente, para fluidos diferentes, las superficies equipotenciales "Φ_i = constante", que pasan a través de un punto dado

no serán en general paralelas entre sí, ya que para cada fluido las superficies equipotenciales son normales a "grad. ϕ_i ".

La importancia de éste es que provee un mecanismo de separación para fluidos de diferentes densidades. Por ejemplo, si comenzásemos inicialmente con una emulsión de dos fluidos inmiscibles de densidades diferentes, las partículas de cada uno serían impulsadas a índices diferentes y, en general, a lo largo de caminos no paralelos. Este proceso continuaría hasta que los dos fluidos estuviesen segregados en regiones diferentes.

Aquí, nuevamente, estamos despreciando las energías superficiales, de modo que para que esto sea estrictamente cierto es necesario que las partículas de fluido sean lo suficientemente grandes como para que las fuerzas impulsoras predominen sobre las fuerzas debidas a tensiones superficiales y fenómenos coloidales.

No se quiere implicar que una segregación de fluidos existente deba haber tenido lugar de la forma indicada, pero sí señalarse que tal mecanismo existe. Supongamos, por ejemplo, que tenemos dos fluidos segregados con una superficie de contacto común. Para que este arreglo sea estable es necesario que un elemento de uno u otro fluido, si fuese colocado en la región ocupada por el otro, sea repelido e impulsado a su propio territorio. El mecanismo para esto es el arriba descrito.

Ahora, si consideramos una región dentro de la cual fluidos diferentes son segregados en partes distintas, habrán tantas superficies de contacto entre fluidos como pares de fluidos diferentes en contacto entre sí. Es nuestro propósito estudiar estas superficies de contacto; pero como las relaciones válidas para una deberían ser válidas para todas, necesitamos considerar solamente una sola superficie de contacto entre dos fluidos de densidades " ρ_1 " y " ρ_2 ", ambos en movimiento constante.

Para un estado de movimiento constante dado fijaremos en el espacio una superficie de contacto de fluidos que mostrará muchas de las propiedades de un límite sólido, impermeable. Si la segregación de los dos fluidos es completa, ninguno de los fluidos podrá cruzar el límite, de modo que las componentes normales del flujo de cada uno deberán ser cero y la línea de flujo de cada lado tangencial al límite.

En caso de que la segregación no sea completa, las componentes normales del flujo no serán cero; y en cada región donde el fluido esté cruzando el límite, las líneas de flujo formarán algún ángulo " $\gamma < 90^\circ$ " con la normal a la superficie dirigida hacia esa región. Un ejemplo importante de esta clase será considerado más adelante.

Considerando, por ahora, el caso de la segregación completa de fluidos, la superficie de contacto actuará como un límite impermeable rígido para cada estado del flujo, pero para cada cambio en el estado del flujo de uno u otro de los fluidos la superficie de contacto se ajustará a una nueva posición de equilibrio. Veamos como esto se relaciona con los potenciales de los dos fluidos.

Hagamos que " n_1 " sea la normal de la superficie de contacto en la región ocupada por el fluido de densidad " ρ_1 ", y " n_2 " la normal en la región del fluido de densidad " ρ_2 ". Suponiendo que nuestros fluidos son líquidos, entonces en cualquier punto de una u otra región

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= gz + \frac{p - p_0}{\rho_1} \\ \phi_2 &= gz + \frac{p - p_0}{\rho_2} \end{aligned} \right\} \quad (183)$$

Como la estabilidad requiere que un elemento de uno u otro fluido en el dominio del otro sea impulsado de vuelta a su propio territorio,

ésto implica componentes de fuerza repulsiva correspondientes a lo largo de las normales superficiales en las respectivas regiones. Estas pueden solamente ser el resultado de un aumento del potencial de cada fluido en el dominio del otro en la dirección de su normal superficial. Entonces, para estabilidad,

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial n_1} \right)_1 &> 0, \\ \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial n_2} \right)_2 &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (184)$$

Estas son obtenidas en una forma conveniente si eliminamos " $p - p_0$ " de la ecuación (183) y extraemos " Φ_1 " y " Φ_2 " respectivamente; obtenemos entonces

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= -\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \cdot g z + \frac{p_1}{\rho_1} \cdot \Phi_2, \\ \Phi_2 &= +\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \cdot g z + \frac{p_2}{\rho_2} \cdot \Phi_1. \end{aligned} \right\} \quad (185)$$

Entonces

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial n_1} \right)_1 &= \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \cdot g \cdot \frac{\partial z}{\partial n_1} + \frac{p_2}{\rho_2} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial n_1} \right)_1, \\ \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial n_2} \right)_2 &= -\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \cdot g \cdot \frac{\partial z}{\partial n_2} + \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial n_2} \right)_2. \end{aligned} \right\} \quad (186)$$

Pero como las componentes normales del flujo a través de la superficie de contacto son cero,

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial n_1}\right)_1 = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial n_2}\right)_2 = 0, \quad (187)$$

de modo que las ecuaciones (186) se simplifican a

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial n_1}\right)_1 &= \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} \cdot g \cdot \frac{\partial z}{\partial n_1} \\ \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial n_2}\right)_2 &= -\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \cdot g \cdot \frac{\partial z}{\partial n_2} \end{aligned} \right\} \quad (188)$$

La estabilidad requiere que ambos términos a mano derecha sean positivos. Teniendo en cuenta que " n_2 " es dirigida opuestamente a " n_1 ",

$$\frac{\partial z}{\partial n_2} = -\frac{\partial z}{\partial n_1}, \quad (188a)$$

de modo que si " n_1 " es dirigida hacia arriba, " $\partial z / \partial n_1$ " es positiva y " $\partial z / \partial n_2$ " es negativa, y vice-versa. De aquí si " n_1 " es la normal dirigida hacia arriba, la estabilidad requiere que " $\rho_1 < \rho_2$ "; si " n_2 " es dirigida hacia arriba, " ρ_2 " debe ser menos que " ρ_1 ". En ambos casos el líquido menos denso debe ocupar el espacio superior. Cuando la superficie de contacto es vertical,

$$\frac{\partial z}{\partial n_1} = \frac{\partial z}{\partial n_2} = 0, \quad (188b)$$

y resulta equilibrio neutro.

13 INCLINACION DE LA SUPERFICIE DE CONTACTO.

Investiguemos ahora la inclinación de la superficie de contacto

como una función de los estados de flujo de los dos fluidos o de sus dos potenciales en los campos de flujo. Eliminando " $\gamma - p_0$ " de la ecuación (183) y extrayendo " z " resulta

$$z = \frac{1}{g} \left(\frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \dot{\Phi}_2 - \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \dot{\Phi}_1 \right) \quad (189)$$

Esta es la elevación de cualquier punto en cualquiera de las dos regiones, o de cualquiera otra región en cuanto a éso, para los que los dos potenciales " $\dot{\Phi}_1$ " y " $\dot{\Phi}_2$ " son conocidos. O, si queremos, podemos pensar que cada punto en el espacio está caracterizado por valores particulares de las tres cantidades " z ", " $\dot{\Phi}_1$ " y " $\dot{\Phi}_2$ ", cuyas relaciones entre sí son dadas por la ecuación (189), de modo que si cualquier par de ellos es conocido el tercero es únicamente determinado.

Consideremos ahora los potenciales y las componentes del flujo en una sección plana vertical a través del sistema. Hagamos que " s ", sea el trazo de la superficie de contacto a lo largo de esta sección. La ecuación (189) es válida para puntos sobre la superficie de contacto y en cualquier otro lugar; y mientras en general no sabemos los valores de " $\dot{\Phi}_1$ " y " $\dot{\Phi}_2$ " en lugares dados de la superficie de contacto, si " α " es su ángulo de inclinación medido positivamente hacia arriba en la dirección " s ",

$$\sin \alpha = \frac{dz}{ds} = \frac{1}{g} \left(- \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{g z \sigma_2}{\sigma_2} + \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{z \sigma_1}{\sigma_1} \right) \quad (190)$$

Entonces, como

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\dot{\Phi}_2}{ds} &= - \frac{\rho_2 g}{\sigma_2} \\ \frac{d\dot{\Phi}_1}{ds} &= - \frac{\rho_1 g}{\sigma_1} \end{aligned} \right\} \quad (191)$$

donde " q_{1s} " es la componente en la dirección "s" del vector de flujo " q_1 " del fluido " ρ_1 " en la sección que estamos considerando, y " q_{2s} " la del fluido " ρ_2 ", éstas pueden ser substituídas en la ecuación (190) transformando ésta última en

$$\sin \alpha = \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{1}{g} \left(-\frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{q_{2s}}{\partial z} - \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{q_{1s}}{\partial s} \right). \quad (192)$$

Si ambos fluidos son estáticos " $q_{1s} = q_{2s} = 0$ " y $\sin \alpha = 0$, mostrando que para estas condiciones la configuración de equilibrio para la superficie de contacto fluida es una superficie horizontal. Comenzando desde un estado estático, mantengamos estático el fluido " ρ_2 " y aumentemos " q_{1s} " en pasos sucesivos. Entonces " q_{2s} " será cero, y la ecuación (192) se transformará en

$$\sin \alpha = \frac{\partial z}{\partial s} = -\frac{1}{g} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot q_{1s} = -\frac{1}{g} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial s}. \quad (193)$$

De aquí, si " $\rho_1 < \rho_2$ ", como el índice de flujo " q_{1s} " del fluido menos denso " ρ_1 " aumentó, $\sin \alpha$ también aumentará, y la superficie de contacto se inclinará hacia arriba en la dirección del flujo.

Ahora, si repetimos este procedimiento, manteniendo " $q_{1s} = 0$ ", y gradualmente aumentamos " q_{2s} ", tendremos

$$\sin \alpha = \frac{\partial z}{\partial s} = +\frac{1}{g} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \cdot q_{2s} = +\frac{1}{g} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial s}, \quad (194)$$

mostrando que para flujo en la dirección "s" del fluido mas denso " ρ_2 " la superficie de contacto se inclinará hacia abajo en la dirección del flujo.

Si ambos fluidos fluyen simultáneamente, el ángulo " α " será la resultante de las dos inclinaciones, como lo determina la ecuación (192).

Si ambos fluyen en la misma dirección, las dos inclinaciones se opondrán entre sí, y "α" será intermedio entre sus valores, debido a que los dos flujos se producen separadamente, transformándose en cero cuando

$$\sin \alpha = 0 = \frac{I}{g} \left(-\frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{g_{12}}{g_2} + \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{g_{11}}{g_1} \right) \quad (194a)$$

o cuando

$$\frac{g_{11}}{g_1} \frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\partial \phi}{\partial s} \quad (195)$$

Cuando los dos fluidos fluyen en direcciones opuestas, las dos inclinaciones componentes se aumentan entre sí, y la resultante es mayor que la debida a una u otra sola.

Para simplificar, concentremos ahora nuestra atención en las ecuaciones que se refieren a los potenciales o sus gradientes, teniendo en mente que siempre podemos cambiar a los índices de flujo por medio de la ecuación de transformación (191) cuando querramos hacerlo.

Notamos, de acuerdo a la ecuación general (190) y a las particulares (193) y (194), que sen. "α" aumenta con el aumento apropiado de las componentes de las gradientes potenciales a lo largo de la superficie de contacto en la sección considerada. Como el valor máximo de sen. "α" es la unidad, será interesante ver qué pasa cuando este valor es alcanzado. Tomando la ecuación general (190), vemos que

$$(\sin \alpha)_{\max} = 1 = \frac{I}{g} \left(\frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial s} - \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial s} \right)_{\max} \quad (196)$$

lo que nos dice que el valor máximo de la diferencia entre los dos

términos en el paréntesis no puede ser mayor que "g". Cuando solo uno de los fluidos está fluyendo a un tiempo, la gradiente potencial del otro será cero, y

$$\left. \begin{aligned} (\sin \alpha)_{\max} = +1 &= -\frac{1}{g} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial s} \right)_{\max}, \\ (\sin \alpha)_{\max} = +1 &= +\frac{1}{g} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial s} \right)_{\max}, \end{aligned} \right\} \quad (196a)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial s} \right)_{\max} &= -g \cdot \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}, \\ \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial s} \right)_{\max} &= +g \cdot \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}, \end{aligned} \right\} \quad (197)$$

donde los fluidos " ρ_1 " y " ρ_2 " están fluyendo, respectivamente.

Las ecuaciones (196) y (197) son afirmaciones de que, cuando cada fluido está fluyendo solo, la componente a lo largo de la superficie de contacto de su gradiente potencial no puede exceder un cierto valor finito crítico y que, cuando ambos fluyen simultáneamente, la diferencia de las componentes de sus gradientes potenciales no puede exceder una cantidad finita crítica especificada. Cuál es el significado de esto, físicamente? A primera vista parece implicar que estas gradientes potenciales críticas son las máximas obtenibles. Es evidente que esta interpretación es absurda cuando consideramos que las gradientes potenciales son nuestras variables independientes y que están sujetas a que les asignemos cualquier valor de una escala muy amplia, que elijamos.

Lo que significa es ésto: Que para valores de las gradientes mayores que los expresados, la superficie de contacto deja de existir. Cuando solo un fluido está fluyendo, ésto se produce por migración lateral hasta que la superficie de contacto coincida con un límite impermeable, o por la confluencia de dos tubos de corriente aproximándose desde direcciones diferentes. En ambos casos el fluido estático es exprimido fuera de la región en la que el valor crítico de la gradiente potencial es excedido.

Cuando ambos fluidos están fluyendo, es imposible la migración lateral de la superficie de contacto vertical hacia un límite impermeable, porque ésto reduciría la sección transversal de los tubos de corriente de uno de los fluidos a cero. En este caso la superficie de contacto emigra lateralmente; y, al hacerlo, aumenta el área de los tubos de corriente de un fluido y disminuye el del otro, reduciendo la primera gradiente potencial y aumentando la segunda. Esta migración continuará hasta que la diferencia máxima crítica de las dos gradientes potenciales sea nuevamente establecida.

En realidad, la misma clase de cosa ocurre donde solo uno de los fluidos está fluyendo. Si la gradiente potencial crítica es sobrepasada, la superficie de contacto se desplaza lateralmente en una dirección tal que aumenta el área de los tubos de corriente y disminuye la gradiente potencial. Esto continuará hasta que la gradiente potencial sea reducida a su valor crítico, o hasta que un límite impermeable u otro juego de tubos de corriente del mismo fluido sea encontrado.

14. LA ELEVACION DE LA SUPERFICIE DE CONTACTO FLUIDA.

La elevación de cualquier punto en el que los potenciales de los dos fluidos son conocidos, es dada por la ecuación (189). En particular, ésto es cierto con respecto a un punto sobre la superficie de

contacto fluida. La dificultad reside en que cuando ambos fluidos estén fluyendo simultáneamente, no conocemos los valores de los dos potenciales en puntos sobre la superficie de contacto; ni existe tampoco ningún método conveniente para determinarlos en la mayoría de los casos. Consecuentemente, para obtener la ecuación de la superficie de contacto para este estado general de flujo nos veríamos obligados a confiar en las ecuaciones de integración de pendiente como la (190), lo que es difícil de hacer en todos los casos menos en los más simples.

Afortunadamente, en la práctica los problemas más importantes encontrados son aquellos en los que uno solo de los dos fluidos está fluyendo, mientras el otro permanece sensiblemente estático y, por lo tanto, a potencial constante. La superficie de contacto se vuelve entonces una superficie equipotencial en términos de este potencial, y la ecuación (189) se transforma en una ecuación lineal entre los valores del potencial restante a lo largo de la superficie de contacto y la elevación de sus puntos.

Por ejemplo, hagamos que el fluido " ρ_1 " fluya mientras el fluido " ρ_2 " permanece estacionario. Entonces en la región " ρ_2 " el potencial " Φ_2 " quedará constante, digamos con un valor " Φ_{20} ". Entonces en toda la región " ρ_2 " y sobre la superficie de contacto la elevación de cualquier superficie dada " $\Phi_1 = \text{constante}$ " será

$$z = \frac{1}{g} \left(\frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \Phi_{20} - \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \Phi_1 \right). \quad (198)$$

Como cuando " $\Phi_1 = \text{constante}$ ", " $z = \text{constante}$ " también, resulta claro que en la región " ρ_2 " la familia de superficies " $\Phi_1 = \text{constante}$ " es horizontal. Cuando intersectan la superficie de contacto, se refractan en perpendicularidad con esa superficie en la región " ρ_1 ".

También de la ecuación (198) la familia de superficies equidiferen-

tas " $\bar{\Phi}_1$ " = constante es equidistantemente espaciada. Si " $\Delta\bar{\Phi}_1$ " fuese la diferencia de potencial entre superficies sucesivas, el espacio que las separa sería

$$(z_1)_2 = \frac{1}{g} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \Delta\bar{\Phi}_1. \quad (199)$$

De una manera similar, si hacemos que el fluido " ρ_1 " permanezca estacionario mientras el fluido " ρ_2 " fluye, y que " $\bar{\Phi}_{10}$ " sea el valor constante del potencial ($\bar{\Phi}_1$), la elevación a lo largo de la superficie de contacto y dentro de la región " ρ_1 " de una superficie " $\bar{\Phi}_2$ " = constante será

$$z = \frac{1}{g} \left(\frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \bar{\Phi}_2 - \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \bar{\Phi}_{10} \right). \quad (200)$$

Estas superficies serán además horizontales en la región " ρ_1 " con una separación, para una diferencia de potencial " $\Delta\bar{\Phi}_2$ ", de

$$(\Delta z)_1 = \frac{1}{g} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \Delta\bar{\Phi}_2. \quad (201)$$

En estos dos casos las gradientes potenciales del fluido en movimiento en la región ocupada por el fluido estático serán verticales. Separando estos dos casos, y extrayendo " $\bar{\Phi}_1$ " y " $\bar{\Phi}_2$ " de las ecuaciones (198) y (200) respectivamente, obtenemos

$$\left. \begin{aligned} (\bar{\Phi}_1)_2 &= -\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \cdot g z + \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \bar{\Phi}_{20}, \\ (\bar{\Phi}_2)_1 &= +\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \cdot g z + \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \bar{\Phi}_{10}. \end{aligned} \right\} \quad (202)$$

de lo que

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\right)_2 &= -\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \cdot g, \\ \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\right)_1 &= +\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \cdot g, \end{aligned} \right\} \quad (203)$$

Haciendo que " $\rho_2 > \rho_1$ ", entonces, cuando la región " ρ_2 " está a potencial constante, el potencial " Φ_1 " disminuye hacia arriba o aumenta hacia abajo al índice " $[(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1]g$ ". En la región " ρ_1 ", cuando esto está a potencial constante el potencial " Φ_2 " aumenta hacia arriba al índice " $[(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2]g$ ". Expuesto vectorialmente,

$$\left. \begin{aligned} (\text{grad } \Phi_1)_2 &= \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \cdot g, \\ (\text{grad } \Phi_1)_1 &= -\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \cdot g, \end{aligned} \right\} \quad (204)$$

donde " g " es ahora el vector dirigido hacia abajo de la aceleración debida a la gravedad.

15. CASO DE TRES FLUIDOS.

Consideremos ahora un caso especial que comprenda a tres fluidos. Hagamos que " ρ_1 ", " ρ_2 " y " ρ_3 " sean sus tres densidades, y que " $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ ". Hagamos que el fluido " ρ_2 " fluya mientras los fluidos " ρ_1 " y " ρ_3 " permanecen estáticos. Tendremos así los tres fluidos dispuestos en tres capas de acuerdo a sus densidades, con el menos denso en la capa superior, y con superficies de contacto 1,2 y 2,3.

Los tres potenciales serán

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= gz + \frac{p - p_0}{\rho_1}, \\ \phi_2 &= gz + \frac{p - p_0}{\rho_2}, \\ \phi_3 &= gz + \frac{p - p_0}{\rho_3}. \end{aligned} \right\} \quad (205)$$

Además, tendremos

$$\left. \begin{aligned} (\phi_1)_1 &= \text{constante} = \phi_{10}, \\ (\phi_2)_2 &\neq \text{constante} = \phi_2, \\ (\phi_3)_3 &= \text{constante} = \phi_{30}. \end{aligned} \right\} \quad (206)$$

Eliminando " $p - p_0$ " de los pares contiguos de ecuaciones (205) y extrayendo a " z ", y después substituyendo los valores de las ecuaciones (206) en los resultados, dá para las elevaciones de los puntos en las dos superficies de contacto

$$\left. \begin{aligned} z_{12} &= \frac{z}{g} \left(\frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \phi_2 - \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \phi_{10} \right), \\ z_{23} &= \frac{z}{g} \left(\frac{\rho_3}{\rho_3 - \rho_2} \cdot \phi_{30} - \frac{\rho_2}{\rho_3 - \rho_2} \cdot \phi_2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (207)$$

Las alturas " z_{12} " y " z_{23} " de estas ecuaciones son las elevaciones por sobre el nivel básico de elevación de la intersección de las dos respectivas superficies de contacto con una superficie " ϕ_2 " = constante. La diferencia entre estas dos elevaciones es

$$\left. \begin{aligned} z_{12} - z_{23} &= \frac{z}{g} \left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} + \frac{\rho_2}{\rho_3 - \rho_2} \right) \phi_2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \phi_{10} - \frac{\rho_3}{\rho_3 - \rho_2} \cdot \phi_{30} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (208)$$

Estas dos elevaciones no son, sin embargo, de puntos o líneas verticalmente uno sobre otro.

También, las superficies equidiferentes " Φ_2 " = constante se refractan a través de las dos superficies de contacto hacia dentro de las dos regiones estáticas como superficies horizontales igualmente espaciadas, con escalas de espaciamiento diferentes en los dos casos. Para una diferencia de potencial " $\Delta\Phi_2$ " los dos espaciamientos son

$$\left. \begin{aligned} (\Delta z_2)_1 &= \frac{1}{g} \cdot \frac{P_2}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \Delta\Phi_{21} \\ (\Delta z_2)_3 &= -\frac{1}{g} \cdot \frac{P_2}{\rho_3 - \rho_2} \cdot \Delta\Phi_{23} \end{aligned} \right\} \quad (209)$$

y sus relaciones son dadas por

$$\frac{(\Delta z_2)_1}{(\Delta z_2)_3} = \frac{P_3 - P_2}{P_2 - P_1} \quad (210)$$

En el caso más importante de tres fluidos, en problemas de agua subterránea, los fluidos son el aire, agua dulce y agua salada. Mientras las ecuaciones precedentes han sido deducidas para líquidos, en este caso el aire está a potencial sensiblemente constante, y así podemos considerarlo sin alterar las ecuaciones anteriores. Hagamos que " ρ_1 " sea la densidad del aire, " ρ_2 " la del agua dulce y " ρ_3 " la del agua salada. Entonces, eligiendo nuestro nivel básico de elevación al nivel del mar y nuestra presión normal como de 1 atmósfera,

$$\begin{aligned}
 (\Phi_1)_1 &= g z_1 + \int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{\rho_1} = 0, \\
 \Phi_2 &= g z_2 + \frac{p_2 - p_0}{\rho_2} = g h, \\
 (\Phi_3)_3 &= g z_3 + \frac{p_3 - p_0}{\rho_3} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{211}$$

También, la densidad del aire es negligible comparada con la del agua, y puede ser por tanto descartada. En este caso las ecuaciones (207) se simplifican a

$$\left. \begin{aligned}
 z_{12} &= \frac{1}{g} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \Phi_2 = h, \\
 z_{23} &= -\frac{1}{g} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_3 - \rho_2} \cdot \Phi_2 = -\frac{\rho_2}{\rho_3 - \rho_2} \cdot h.
 \end{aligned} \right\}
 \tag{212}$$

La diferencia entre estas elevaciones para una superficie dada " Φ_2 " = constante es entonces

$$z_{12} - z_{23} = \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_3 - \rho_2} \right) h = \frac{\rho_3}{\rho_3 - \rho_2} \cdot h.
 \tag{213}$$

Los espaciamientos de superficies equipotenciales de agua fresca en regiones ocupadas por aire y agua salada, respectivamente, pueden ser obtenidos de la ecuación (209) y son

$$\left. \begin{aligned} (\Delta z_2)_1 &= \frac{1}{g} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \Delta \Phi_2 = \Delta h, \\ (\Delta z_2)_3 &= -\frac{1}{g} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_3 - \rho_2} \cdot \Delta \Phi_2 = -\frac{\rho_2}{\rho_3 - \rho_2} \cdot \Delta h, \end{aligned} \right\} \quad (214)$$

y su relación es

$$\frac{(\Delta z_2)_1}{(\Delta z_2)_3} = -\frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_2}. \quad (215)$$

Debería agregarse que, de acuerdo con una estipulación anterior, hemos despreciado aquí la tensión superficial de la superficie de contacto agua dulce-aire. En rigor de verdad, la elevación " z_{12} " es la de la lámina acuífera. La superficie de contacto real agua-aire dentro de un medio permeable estará un poco más alta que esto.

En todas estas ecuaciones "h" se refiere a la elevación de la superficie libre en un tubo manométrico llenado con agua dulce y terminado en el punto cuyo potencial se desea determinar.

Hendríamos que recalcar nuevamente que las elevaciones " z_{12} " y " z_{23} " son las elevaciones por sobre el nivel básico de elevación de las intersecciones con las superficies de contacto superior e inferior de una superficie equipotencial de agua dulce particular, y solamente en el caso de que todos los tres fluidos estén en equilibrio estático estas elevaciones se presentarán una verticalmente encima de la otra. En todos los otros casos la superficie " Φ_2 " = constante será curva y la distancia vertical entre las superficies de contacto superior e inferior será mayor -a veces pero no siempre en cantidad despreciable- que la diferencia " $z_{12} - z_{23}$ " tal como es dada por la ecuación (213).

Donde una superficie dada " $\bar{\Phi}_2$ " = constante interseca las superficies de contacto superior e inferior, los senos de los ángulos de inclinación de estas superficies son

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha_{12} &= \frac{\bar{z}}{g} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial s_{12}}; \\ \sin \alpha_{23} &= -\frac{\bar{z}}{g} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_3 - \rho_2} \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial s_{23}}; \end{aligned} \right\} \quad (216)$$

Si supusiéramos que " $\partial \bar{\Phi}_2 / \partial s_{12} = \partial \bar{\Phi}_2 / \partial s_{23}$ ", lo que en muchos casos es una buena aproximación, entonces las razones de los senos de estos dos ángulos serían

$$\frac{\sin \alpha_{12}}{\sin \alpha_{23}} = -\frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_2 - \rho_1} = -\frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_2}, \quad (217)$$

que es lo mismo que la relación de los espaciamientos de las superficies equipotenciales dada por la ecuación (215). Para agua dulce y agua salada la relación " $(\rho_3 - \rho_2) / \rho_2 \cong \frac{1}{40}$ ".

15. FLUJOS A TRAVÉS DE UNA SUPERFICIE DE CONTACTO.

En lo que antecede hemos supuesto que no se producía ningún flujo a través de las superficies de contacto de los fluidos. Hay algunos casos importantes en los que ésto no es cierto. Si la segregación no es completa, elementos discretos de uno u otro fluido, de tamaño finito, en el territorio del otro, serán repelidos o impulsados de vuelta hacia dentro de su propio territorio. La caída de gotas de lluvia desde la atmósfera hacia la superficie aire-agua es un ejemplo importante de este tipo; la ascensión de burbujas de gas a través de un líquido es otro. Para procesos en la dirección opuesta tenemos la

difusión y la evaporación.

En uno y otro caso, cuando una región dada está ganando o perdiendo su fluido propio a través de una superficie de contacto de fluidos, las líneas de flujo y tubos de flujo no serán más paralelos a la superficie de contacto sino que terminarán sobre ella. La superficie de contacto actuará consecuentemente como una fuente o un desagüe.

Asimismo las superficies equipotenciales se aproximarán ahora a la superficie de contacto a algún ángulo distinto de 90° . La configuración de la superficie de contacto, sin embargo, todavía estará determinada por los dos juegos de potenciales de los fluidos contiguos de la misma manera que ya hemos tratado.

17. REFRACCION DE UNA SUPERFICIE DE CONTACTO DE FLUIDOS A TRAVES DE UN LIMITE PLANO ENTRE MEDIOS DE DIFERENTES PERMEABILIDADES.

Investiguemos ahora el comportamiento de la superficie de contacto entre dos fluidos cuando ésta intersecta el límite plano entre medios de permeabilidades distintas. Estas dos superficies dividirán ahora nuestro campo de flujo en regiones "a" y "b" de diferentes permeabilidades y en regiones 1 y 2 ocupadas por fluidos distintos. Hagamos que " ρ_1 " sea la densidad de uno de los fluidos y " ρ_2 " la del otro, con " $\rho_1 < \rho_2$ ", y que " k_a " y " k_b " sean las dos permeabilidades.

Para mayor simplicidad consideramos solo las componentes del flujo y los gradientes potenciales correspondientes en un plano vertical único arbitrario, y permitimos que uno solo de los fluidos fluya mientras el otro permanece estático y a un potencial constante. El fluido en movimiento es un líquido, aunque si el fluido más denso está fluyendo, el menos denso puede ser un gas. Hacemos que el fluido en movimiento siempre cruce el plano "a-b" en dirección desde "a" hacia "b". Hacemos que " β " sea el ángulo de inclinación del plano "a-b" en la sección considerada, medido hacia arriba desde la horizontal en la

dirección del flujo, " s_{ab} " la longitud a lo largo de su trazo, y " n " su normal. Hacemos que " α_a " y " α_b " sean los ángulos de inclinación limitantes de la superficie de contacto de los fluidos en las regiones " a " y " b " en la sección vertical considerada al aproximarse al plano " $a-b$ ", y " s_{12} " la longitud a lo largo de su trazo en la dirección del flujo.

Ahora hacemos que el fluido " ρ_1 " fluya mientras el fluido " ρ_2 " permanece estacionario. Entonces las superficies " $\phi_1 = \text{constante}$ " se aproximarán a la superficie de contacto de los fluidos en forma perpendicular en la región " ρ_1 " para después refractarse en una familia de superficies horizontales igualmente espaciadas en la región " ρ_2 ". Dentro de la región " ρ_1 " a lo largo del plano " $a-b$ " al aproximarse a la superficie de contacto de los fluidos, las condiciones que debe satisfacer el límite son las siguientes: Las componentes normales de flujo a través del plano " $a-b$ " deben ser iguales en las regiones " a " y " b ", y las componentes tangenciales del potencial " ϕ_1 " deben ser las mismas en estas dos regiones:

$$\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial s_{ab}}\right)_{Ia} = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial s_{2b}}\right)_{Ib} \quad (218)$$

$$(q_m)_{Ia} = (q_m)_{Ib} \quad (219)$$

Cada una de estas cantidades puede ahora ser evaluada separadamente en términos de la gradiente de " ϕ_1 ", en la región 2, que es fija, y de las permeabilidades " k_a " y " k_b " y los ángulos " α_a ", " α_b " y " β ". Entonces obtenemos

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial s_{ab}}\right)_{Ia} &= \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial s_{I2}}\right)_{Ia} \cos(\beta - a_a) = \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial z}\right)_2 \sin a_a \cdot \cos(\beta - a_a), \\ \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial s_{ab}}\right)_{Ib} &= \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial s_{I2}}\right)_{Ib} \cos(\beta - a_b) = \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial z}\right)_2 \sin a_b \cdot \cos(\beta - a_b). \end{aligned} \right\} \quad (220)$$

Similarmente,

$$\left. \begin{aligned} - (q_{in})_{Ia} &= \sigma_a \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial n}\right)_{Ia} = \sigma_a \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial s_{I2}}\right)_{Ia} \sin(\beta - a_a) \\ &= \sigma_a \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial z}\right)_2 \sin a_a \cdot \sin(\beta - a_a), \\ - (q_{in})_{Ib} &= \sigma_b \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial n}\right)_{Ib} = \sigma_b \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial s_{I2}}\right)_{Ib} \sin(\beta - a_b) \\ &= \sigma_b \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial z}\right)_2 \sin a_b \cdot \sin(\beta - a_b). \end{aligned} \right\} \quad (221)$$

Igualando las ecuaciones separadas (220) tenemos

$$\sin a_a \cdot \cos(\beta - a_a) = \sin a_b \cdot \cos(\beta - a_b). \quad (222)$$

Las ecuaciones (221) dan

$$\sigma_a \sin a_a \cdot \sin(\beta - a_a) = \sigma_b \sin a_b \cdot \sin(\beta - a_b). \quad (223)$$

Pero, como

$$\sigma_a = \frac{k_a \rho_I}{\eta_I}, \quad \text{and} \quad \sigma_b = \frac{k_b \rho_I}{\eta_I}, \quad (223c)$$

La ecuación (223) se reduce a

$$k_a \sin a_a \cdot \sin(\beta - a_a) = k_b \sin a_b \cdot \sin(\beta - a_b). \quad (224)$$

Las ecuaciones (222) y (224) dan las relaciones entre " a_a ", " a_b ", " β ", " k_a " y " k_b ", las que deben ser simultáneamente satisfechas en la intersección de la superficie de contacto de los fluidos con el plano "a-b". Como el fluido cruza este plano de "a" hacia "b",

$$a_a \leq \beta, \quad a_b \leq \beta. \quad (224a)$$

Los ángulos " a_a " y " a_b " son las variables dependientes cuyos valores deben ser determinados cuando los valores de las variables independientes " β ", " k_a " y " k_b " son dados.

A la ecuación (222) se le da una interpretación geométrica simple si dibujamos un círculo cuyo diámetro vertical dirigido hacia arriba es tomado como un vector unidad. Entonces en el extremo inferior de este diámetro dibujamos una línea horizontal. Tomando la intersección de estas dos líneas como un origen polar, trazamos los ángulos " a_a ", " a_b " y " β " medidos desde la horizontal. Las líneas a través del origen que forman los ángulos " a_a ", " a_b " y " β ", respectivamente, forman cuerdas del círculo. La longitud de la cuerda " a_a " es numéricamente igual a $\text{sen. } a_a$, y su proyección sobre la cuerda " β " es igual a $\text{sen. } a_a \cdot \cos. (\beta - a_a)$; la longitud de la cuerda " a_b " es igual a $\text{sen. } a_b$, y su proyección sobre la cuerda " β " es $\text{sen. } a_b \cdot \cos. (\beta - a_b)$.

Cuando ésto ha sido efectuado, al revisarlo se vé que la ecuación (222) puede únicamente ser satisfecha por

$$a_a = a_b. \quad (225)$$

Introduciendo este resultado en la ecuación (224) transformamos a ésto en

$$k_a \sin a_a \cdot \sin(\beta - a_a) = k_b \sin a_a \cdot \sin(\beta - a_a). \quad (226)$$

Sin embargo, antes de extraer a " a_a " debemos tomar en cuenta otra condición, pues, debido a la inestabilidad de la superficie de contacto que resultaría para valores mayores que ésto, el máximo valor posible para " a_a " es 90° . Debemos por lo tanto hacer una distinción entre las soluciones de la ecuación (226) para valores de " β " mayores que 90° y valores menores de 90° . Para " $\beta < 90^\circ$ " las soluciones de la ecuación (226) para distintos valores de " k_a " y " k_b " son

$$k_a \neq k_b: \sin a_a \cdot \sin(\beta - a_a) = 0, \quad a_a = 0 \text{ or } \beta. \quad (227)$$

$$k_a = k_b: 0 \leq \sin a_a \cdot \sin(\beta - a_a) \leq 1, \quad 0 \leq a_a \leq 90^\circ. \quad (228)$$

Cuando " $a_a = 0$ ", ambos fluidos están en equilibrio estático de modo que su superficie de contacto es una superficie horizontal sobre la cual el plano "a-b" no ejerce ninguna influencia. Sin embargo, cuando el fluido " ρ_1 " fluye, " a_a " no puede ser cero; y si " $k_a \neq k_b$ ", entonces la superficie de contacto debe torcerse como para aproximarse y dejar el plano "a-b" tangencialmente. Físicamente, ésto es algo similar a una curva de transición de líneas ferroviarias, donde la fuerza centrífuga va siendo aumentada gradualmente desde cero nuevamente. En el caso de los fluidos las discontinuidades son evitadas

cuando la superficie de contacto se aproxima al plano "a-b" y se aleja de él tangencialmente. Cuando " $k_a = k_b$ " el problema se reduce al del flujo a través de un medio homogéneo.

Cuando $90^\circ < \beta < 180^\circ$, $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$; y, rigurosamente hablando, es imposible satisfacer la ecuación (226) excepto cuando " $\alpha = 0$ ", correspondiendo a flujo cero, o cuando " $k_a = k_b$ ", correspondiendo a un medio homogéneo.

Evidentemente en este caso, cuando " $k_a \neq k_b$ ", alguna discontinuidad debe tener lugar, y nuestro problema se convierte en determinar la naturaleza de la discontinuidad. Cuando " $k_b > k_a$ ", esto es bastante obvio. Imaginemos que el flujo se produce desde "a" hacia "b" mientras el ángulo " β " es lentamente aumentado desde un valor menor de 90° hasta uno mayor de esta cantidad. Hasta que " β " alcanza 90° y el plano "a-b" es vertical, los ángulos " α " igualarán a " β ", y la superficie de contacto se aproximará a la superficie tangencialmente. Cuando se lo rota aún más, " α " permanecerá en 90° . La descarga " q_{1a} " llegará entonces a su máximo en la región "a", pero a través del plano "a-b" en la región "b" habrá la misma gradiente potencial que en "a" pero una mayor permeabilidad. Esto producirá una velocidad de flujo más rápida que en "a"; pero como la descarga total no puede ser diferente de la de "a", el fluido " ρ_1 " en "b" se desmembrará y se mezclará con el fluido " ρ_2 " o, si son inmiscibles, se formarán gotas que ascenderán verticalmente hacia arriba a través de una matriz " ρ_2 " hasta que la superficie de contacto en la región "b" sea encontrada y cruzada.

Las líneas de flujo ascendentes a lo largo del plano "a-b" en la región "a" girarán gradualmente hacia la normal a la superficie. Cuando el ángulo " θ_a " que forman con esta normal alcance un valor tal que

$$\tan \theta_a = \frac{k_a}{k_b} \tan \theta_b = \frac{k_a}{k_b} \tan (180^\circ - \beta), \quad (229)$$

correspondiente a la ley tangencial de refracción con las líneas de flujo verticales en la región "b", se restablecerá la continuidad del flujo.

Entonces, para " β " $> 90^\circ$ y " k_b " $> k_a$ habrá un desplazamiento finito de la superficie de contacto en la región "b" hacia arriba a lo largo del plano "a-b" desde su término en la región "a", con ambos ángulos " α_a " y " α_b " iguales a 90° . Entre los términos de estas dos superficies de contacto el flujo a través del plano "a-b" causará en la región "b" una zona de difusión y mezcla, o una zona en la que el fluido " ρ_1 " se percolará (filtrará) hacia arriba a través del fluido " ρ_2 " hasta que cruce nuevamente la superficie de contacto.

Cuando $90^\circ < \beta < 180^\circ$, y " k_a " $> k_b$, y $0 < \alpha_a = 90^\circ$, el problema es indeterminado, pues ningún valor de " α_a " dentro de estos límites satisfará la ecuación (226). Tampoco podrá haber una discontinuidad de fluido a través del plano "a-b", porque el fluido de velocidad mayor estará ahora en la región "a"; ni es posible un desplazamiento de la superficie de contacto de los fluidos en la región "b" "hacia abajo" del plano "a-b" porque ésto correspondería a un flujo en la dirección del potencial creciente. Lo que debe ocurrir es que existe una zona de distorsión en la vecindad inmediata de la intersección de las dos superficies de modo que la ecuación (226) no representa el verdadero estado de las cosas. Evidentemente la superficie de contacto es continua a través del plano "a-b"; y en los casos especiales en que el flujo es cero o que " $k_a = k_b$ ", " $\alpha_a = \alpha_b$ ". Más que ésto no podemos decir.

Si mantenemos estacionario al fluido " ρ_1 " y dejamos que fluya el

fluido " ρ_2 ", podremos deducir ecuaciones análogas a las (218) a (229). En este caso el ángulo de inclinación " α " de la superficie de contacto será hacia abajo en la dirección del flujo, y el ángulo " ϕ " debería ser medido en la misma dirección que " α ".

El caso más importante de esto en la práctica se presenta cuando " k_a " es finita y " k_b " infinita, correspondiendo al flujo desde una región subterránea hacia un espacio abierto. En este caso, cuando $0 < \phi < 90^\circ$, " $\alpha_a = \phi$ " y la superficie de contacto se aproximará tangencialmente al plano "a-b". Sin embargo, como la descarga a través de este plano debe producirse (por hipótesis), las líneas de flujo en la región "a" que se alejan de la superficie de contacto deben girar como para intersectarla. A través del límite en la región "b" este fluido es absorbido por mezcla y difusión, ó forma una película delgada y fluye hacia arriba a lo largo del plano "a-b" hasta que encuentra una superficie de contacto horizontal entre cuerpos estáticos de los dos fluidos.

Cuando $90^\circ < \phi < 180^\circ$, ocurre una cosa similar excepto que " $\alpha_a = 90^\circ$ ", y el fluido " ρ_1 " se mezcla o se difunde dentro del fluido " ρ_2 ", ó sino se eleva verticalmente por filtración hasta que cruza la superficie de contacto horizontal entre cuerpos estáticos de los dos fluidos.

En estos dos casos la zona a lo largo del plano "a-b" entre el término de la superficie de contacto sobre él en la región "a", y la superficie de contacto estática de los fluidos en la región "b" es llamada una "superficie de filtración". A lo largo de la superficie de filtración el fluido " ρ_1 " ocupa un lado del plano "a-b"; y, con excepción de una posible lámina del fluido " ρ_2 " en el lado "b", el fluido " ρ_2 " ocupa el otro. Consecuentemente, a lo largo del plano "a-b" en la zona de filtración la componente de la gradiente de " Φ_1 " es

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_I}{\partial s_{a,b}} = (\text{grad } \bar{\Phi}_I)_{1a} \sin \theta = (\text{grad } \bar{\Phi}_I)_2 \sin \beta, \quad (229a)$$

o

$$(\text{grad } \bar{\Phi}_I)_{1a} = (\text{grad } \bar{\Phi}_I)_2 \frac{\sin \beta}{\sin \theta} \quad (230)$$

donde " θ " es el ángulo que estas líneas de flujo forman con la normal al plano "a-b".

Para valores constantes de " β ", $(\text{grad. } \bar{\Phi}_I)_2 \text{ sen. } \beta$ es constante, lo que indica que a lo largo de la superficie de filtración la componente tangencial de la gradiente potencial es constante, de modo que, al decrecer los valores de " θ " de 90° a 0° , el valor correspondiente de $(\text{grad. } \bar{\Phi}_I)_{1a}$ aumenta desde cero hasta infinito.

En la región "a", en la superficie de contacto de los fluidos, las líneas de flujo se aproximan al plano "a-b" vertical o tangencialmente, y aquí los valores respectivos de " θ " son 90° o $180^\circ - \beta$. Entonces más allá de la superficie de contacto entre los cuerpos estáticos de los fluidos " ρ_1 " y " ρ_2 " en la región "b", la componente tangencial de la gradiente de " $\bar{\Phi}_I$ " abruptamente se convierte en cero, porque el cuerpo " ρ_1 " es una región de " $\bar{\Phi}_I = \text{constante}$ ". Opuestamente a esto las líneas de flujo en la región "a" deben aproximarse al plano "a-b" perpendicularmente, de modo que aquí el ángulo " θ " es cero.

De aquí que en la región "a", desde un borde de la zona de filtración al otro, la dirección de las líneas de flujo con respecto a la normal al plano debe cambiar de " $\theta = 0$ " a " $\theta = 180^\circ - \beta$ ", ó 90° . Este cambio no puede ser discontinuo con la distancia porque, si lo fuese, tendríamos dos líneas de flujo separadas en la región "a" intersectándose sobre el plano "a-b", o un tubo de corriente finito

convergiendo hasta tener una sección transversal de cero. Consecuentemente,

$$\frac{\partial s_{ab}}{\partial \theta} > 0. \quad (231)$$

Si hacemos que "A" y "B" marquen los bordes de la zona de filtración con "A" correspondiendo a " θ " = 0 y "B" a " θ " = máximo, entonces el ancho de la zona de filtración es

$$s_{ab}|_A^B = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \frac{\partial s_{ab}}{\partial \theta} \cdot d\theta > c. \quad (232)$$

Consecuentemente, mientras " θ_A " \neq " θ_B ", el ancho de la zona de filtración deberá ser siempre mayor que cero. (12).

La componente normal del flujo a través de la zona de filtración será

$$\left. \begin{aligned} q_{1n} &= -\sigma_a (\text{grad } \bar{\phi}_1)_{1a} \cos \theta = -\sigma_a (\text{grad } \bar{\phi}_1)_2 \frac{\sin \beta}{\sin \theta} \cdot \cos \theta \\ &= -\sigma_a (\text{grad } \bar{\phi}_1)_2 \sin \beta \cdot \cot \theta. \end{aligned} \right\} \quad (233)$$

Para un caso dado todas las cantidades en la ecuación (233) son constantes excepto " q_{1n} " y " θ ", de modo que, al decrecer " θ " de su valor máximo a cero, a lo largo de la zona de filtración, " q_{1n} " aumenta simultáneamente a lo largo de esta zona desde un mínimo (cero si " $\theta_{\text{max.}}$ " = 90°) hasta un máximo que se aproxima a infinito al irnos aproximando a la superficie de contacto estática de los fluidos. En realidad, en esta vecindad las velocidades exceden los límites de aplicabilidad de la Ley de Darcy, de modo que todo lo que esto significa es que " q_{1n} " alcanza un valor máximo finito en ese punto.

18. APLICACION A AGUAS SUBTERRANEAS.

En problemas de aguas subterráneas en los que nuestros fluidos son el aire, agua dulce y agua salada, tenemos una superficie de contacto entre los fluidos aire-agua dulce y aire-agua salada y entre agua dulce-agua salada. La última es estable solo bajo tierra, siendo quebrada en cuencas abiertas por difusión y mezcla debido a movimientos resultantes de gradientes potenciales muy pequeñas. Consecuentemente, en cuencas abiertas podemos tener un cuerpo más o menos uniforme de agua salada o de agua dulce, pero no capas estáticas de ambas con una discreta superficie de contacto.

Cuando el agua dulce fluye a una cuenca de agua dulce que tiene una superficie de contacto agua-aire, se formará una zona de filtración de ancho finito a lo largo de la superficie del terreno por encima del nivel del agua en la cuenca. Si la pendiente de este terreno es menos que vertical, la superficie de contacto agua-aire se le aproximará tangencialmente; si sobresale, la superficie de contacto agua-aire se le aproximará verticalmente. En la zona de filtración el agua fluirá o goteará hacia la cuenca de agua dulce, o se evaporará en el aire.

Si la cuenca de agua es de agua salada con una superficie de contacto aire-agua salada estática y el agua dulce está fluyendo, entonces las superficies de contacto aire-agua dulce y aire-agua salada serán efectivas. Sobre la superficie del agua en la cuenca abierta habrá una zona de filtración agua dulce-aire, y por debajo de ese nivel una zona de filtración agua dulce-agua salada.

En la primera zona el agua dulce se evaporará o fluirá sobre la superficie del terreno hacia la cuenca de agua salada; en la segunda fluirá hacia ella directamente. En ambos casos se producirá mezcla de agua dulce con salada, y el agua dulce, como tal, desaparecerá.

Para la zona de filtración agua dulce-aire, el ángulo " β " será, en la mayoría de los casos, menor de 90° , mientras que para la zona agua

dulce-agua salada será casi siempre mayor de 90° . Por lo tanto, bajo una cuenca de agua salada la superficie de contacto agua dulce-agua salada se aproximará verticalmente al límite de la cuenca.

También, para el flujo hacia una cuenca de agua salada, toda la descarga de agua dulce debe fluir a través de zonas de filtración combinadas, ya que los límites exteriores de éstas son las dos superficies de contacto de los fluidos. Consecuentemente, su ancho combinado no puede ser cero sino que debe ser finito y suficientemente grande como para dar lugar a la descarga.

Como no hay cuerpo equipotencial de agua dulce en la cuenca, entonces a lo largo de la superficie del terreno (el plano "a-b") las componentes tangenciales de la gradiente potencial serán

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial s_{ob}}\right)_1 &= (\text{grad } \Phi_2)_1 \sin \beta, \\ \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial s_{ab}}\right)_3 &= (\text{grad } \Phi_2)_3 \sin \beta, \end{aligned} \right\} \quad (23A)$$

donde los subíndices 1, 2 y 3 indican el aire, agua dulce y agua salada respectivamente, y " s_{ab} " es la distancia a lo largo de la pendiente ascendente del plano "a-b", cuyo ángulo de pendiente en ambos casos es " β ". La cantidad $(\text{grad } \Phi_2)_1$ es un vector dirigido verticalmente hacia arriba, y $(\text{grad } \Phi_2)_3$ es otro dirigido verticalmente hacia abajo. Consecuentemente, las componentes de estas dos gradientes a lo largo del plano "a-b" (la superficie del terreno) estarán dirigidas opuestamente, cada una alejándose de la superficie de contacto agua salada-aire. La intersección de la superficie estática agua salada-aire con la superficie del terreno será por lo tanto una línea a través de la cual la componente tangencial de la gradiente potencial a lo largo del plano "a-b" cambiará dirección abruptamente. Las líneas de flujo al mismo

tiempo tendrán que hacer una transición desde un lado de la normal a la superficie al otro. Para que el ángulo " θ " no cambie discontinuamente con la distancia, la gradiente potencial y el índice de flujo " q " deben volverse muy grandes en el punto de esta transición. Consecuentemente, la intersección de la superficie estática agua salada-aire con la superficie del terreno será la región en la que el flujo del agua dulce desde el terreno será más concentrado.

19. EL EFECTO DE CAPILARIDAD.

En todos nuestros estudios de superficies de contacto de fluidos hemos supuesto que no existían fuerzas capilares. En el caso de una superficie de contacto entre fluidos miscibles como agua dulce y agua salada esta presunción es válida; pero para agua-aire, agua-aceite y otras superficies de contacto similares no es válida.

Cuando dos fluidos están en contacto entre sí y con la cara plana de un sólido, hay tres tensiones superficiales: " T_{12} ", " T_{23} " y " T_{31} ", una entre cada par de substancias indicadas por los subíndices 1, 2 y 3. Estas tensiones son fuerzas por unidad de longitud a lo largo de la superficie. Hagamos que la sustancia 3 sea el sólido, y que " γ " sea el ángulo entre las superficies de contacto del fluido 1 con el sólido y con el fluido 2.

Para que exista equilibrio las componentes de todas las tensiones paralelas a la cara del sólido deben balancear. Por lo tanto,

$$T_{31} + T_{12} \cos \gamma = T_{23}, \quad (234a)$$

$$T_{12} \cos \gamma = T_{23} - T_{31}. \quad (235)$$

Estas tensiones son constantes para pares de materiales dados. Cuando $\gamma < 90^\circ$, decimos que el fluido 1 "moja" al sólido; cuando $\gamma > 90^\circ$ (mercurio sobre vidrio, por ejemplo), no se produce "mojadura". En el primer ejemplo, la línea de confluencia de las tres sustancias tiende a moverse alejándose de la región del fluido 1; en el segundo, acercándose a ella.

Cuando

$$T_{23} - T_{31} > T_{12}, \quad (235a)$$

el ángulo γ es cero, y decimos que el fluido 1 moja al sólido completamente. Esto es mostrado por una superficie de contacto agua-aire sobre vidrio, cuarzo, y otros minerales formadores de rocas.

Paralela a la cara del sólido y dirigida desde el fluido 1 al fluido 2, actúa sobre la superficie de contacto 1,2 una fuerza neta de $T_{12} \cos \gamma$ por unidad de longitud de contacto con el sólido. Esto motiva que la superficie de contacto emigre en la dirección de la fuerza hasta que los dos fluidos forman una diferencia de presión, cuya fuerza resultante equilibra la debida a la tensión superficial.

Cuando tratamos con dos fluidos que ocupan los espacios de los poros de un sólido permeable, las superficies de contacto cuyas tensiones superficiales deben considerarse son las de los dos fluidos y el armazón sólido. Las paredes del sólido, en lugar de ser planas, son ahora redondeadas o angulares. Si el medio sólido es macroscópicamente isotrópico, las superficies del sólido a lo largo del trazo de la superficie de contacto de los fluidos estarán diversamente orientadas. Microscópicamente, por lo tanto, la superficie de contacto de los fluidos será muy complicada, y tendrá radios de curvatura del orden de la magnitud del ancho de los espacios abiertos en la roca.

Macroscópicamente, sin embargo, estas irregularidades diminutas se pierden de vista y la superficie de contacto de los fluidos se vuelve lisa, con radios de curvatura tan grandes que los elementos de

superficie macroscópicas pueden generalmente considerarse como planos (12a).

Ahora, tomemos un elemento de superficie macroscópico " ΔS " sobre la superficie de contacto, al que erigimos una normal a la superficie en la dirección desde el fluido 1 hacia el fluido 2. Dentro de esta área de superficie hacemos que " ds " sea un elemento microscópico de longitud de la línea de contacto de la superficie de contacto 1,2 con la superficie sólida del medio, y que " df " sea el elemento de fuerza capilar normal a " ds " y paralelo a la cara sólida. Hagamos que " θ " sea el ángulo entre la dirección de " df " y la normal a la superficie " n ". La magnitud de esta fuerza será

$$df = T_{12} \cos \gamma \cdot ds; \quad (236)$$

y, si la descomponemos en componentes tangencial y normal a la superficie " ΔS ", éstas serán

$$df_t = T_{12} \cos \gamma \cdot ds \cdot \sin \theta \quad (237)$$

y

$$df_n = T_{12} \cos \gamma \cdot ds \cdot \cos \theta, \quad (238)$$

respectivamente. La fuerza total sobre la superficie " ΔS " es entonces obtenida por integración.

Cuando se considera que las componentes tangenciales de la fuerza " df_t " están diversamente orientadas en el elemento de superficie " ΔS " y por lo tanto tienen simetría radial alrededor de la normal " n ", resulta claro que éstas, vectorialmente consideradas, deben cancelarse entre sí, y

$$\int_{\Delta S} df_t = 0. \quad (239)$$

Las componentes normales, por el contrario, deben tener el mismo signo algebraico, ya que la dirección del elemento de fuerza "df" que forma el ángulo " θ " con la normal "n" está esencialmente restringida al semi-espacio ocupado por un fluido o el otro. Consecuentemente,

$$f_n = \int_{\Delta S} df_n = T_{12} \cos \gamma \int_{\Delta S} ds \cdot \cos \theta. \quad (240)$$

Una evaluación analítica de " $\int_S ds \cdot \cos \theta$ " implica hacer presunciones con respecto a la estructura microscópica del medio y superficie de contacto de los fluidos, que en el mejor de los casos solo pueden ser medianas aproximaciones, de modo que, como la permeabilidad "k", esta cantidad es más pronta y exactamente obtenible por vía experimental. Podemos, sin embargo, transformarla en una forma más conveniente escribiendo

$$\int_{\Delta S} ds \cdot \cos \theta \equiv s \overline{\cos \theta}, \quad (241)$$

donde "s" es el largo total en el área " ΔS " del contacto de la superficie de contacto 1,2 con las superficies del medio sólido, y " $\overline{\cos \theta}$ " un valor promedio o efectivo de $\cos \theta$ para el área macroscópica entera. La cantidad " $\overline{\cos \theta}$ " depende solo de la forma interna del medio y no de su escala de tamaño, de modo que debería ser constante para medios geoméricamente similares.

Combinando las ecuaciones (241) y (240) tenemos

$$f_n = T_{12} \cos \gamma - s \overline{\cos \theta}. \quad (242)$$

Esta fuerza, que está distribuida sobre la superficie de contacto de los fluidos, motiva que ésta emigre en la dirección de " f_n " hasta que una diferencia de presión en los cuerpos fluidos sobre lados opuestos de la superficie de contacto, lo suficientemente grande como para contrarrestarla, es desarrollada. La cantidad de esta diferencia de presión, o presión "capilar", es dada por

$$p_2 - p_1 = p_c = \frac{f_n}{\epsilon \cdot \Delta S} = \frac{T_{12} \cos \gamma \cdot s \overline{\cos \theta}}{\epsilon \cdot \Delta S}. \quad (243)$$

Para superficies de contacto entre los dos mismos fluidos en dos medios geoméricamente similares, "a" y "b", del mismo material

$$\frac{(p_c)_b}{(p_c)_a} = \frac{\left(\frac{T_{12} \cos \gamma \cdot s \overline{\cos \theta}}{\epsilon \cdot \Delta S} \right)_b}{\left(\frac{T_{12} \cos \gamma \cdot s \overline{\cos \theta}}{\epsilon \cdot \Delta S} \right)_a} = \frac{s_b \cdot \Delta S_a}{s_a \cdot \Delta S_b}. \quad (244)$$

Pero

$$\frac{s_b}{s_a} = \frac{d_b}{d_a}, \quad \text{and} \quad \frac{\Delta S_a}{\Delta S_b} = \frac{d_a^2}{d_b^2}, \quad (245)$$

de modo que cuando éstas son introducidas en la ecuación (244) esta última se reduce a

$$\frac{(p_c)_b}{(p_c)_a} = \frac{d_a}{d_b}, \quad (246)$$

donde " d_a " y " d_b " son los diámetros granulares promedios u otras longitudes características de los dos medios. En general, para los mismos materiales y medios geoméricamente similares,

$$p_c = C \cdot \frac{1}{d}, \quad (247)$$

donde "C" es una constante de proporcionalidad.

En problemas de aguas subterráneas, a través de la superficie de contacto agua dulce-aire en una arena de cuarzo el agua moja la arena, y el ángulo " γ " es sensiblemente cero. Consecuentemente, la fuerza " f_n " sobre la superficie de contacto es dirigida desde la región ocupada por el agua hacia la ocupada por el aire.

El equilibrio es establecido cuando la presión contra el aire excede la presión contra el agua en lados opuestos de la superficie de contacto en la cantidad " p_c ". El orden de magnitud de esta presión capilar para diferentes grados de grosor de la arena puede ser obtenido notando que para una arena de cuarzo mezclada no consolidada, de diámetro granular promedio de aproximadamente 0,02 cm. el aumento vertical de la altura manométrica de agua de otra forma estática es aproximadamente -15 cm. En este caso

$$pgh_c = C \cdot \frac{1}{d}, \text{ or } C = pgh_d, \quad (248)$$

donde " h_c " es el aumento en la altura manométrica del agua (en este caso negativo) debido a la presión capilar contra el agua (también negativa). Suministrando los valores numéricos citados arriba resulta

$$p_c \cong -1.5 \times 10^4 \text{ dyne/cm}^2, \quad (248a)$$

$$C \cong -300 \text{ dyne/cm.}$$

Este valor para " C " no está basado sobre análisis sedimentarios precisos de modo que debe ser tomado solo como un orden de magnitud. Empleándolo en tal capacidad, sin embargo, podemos tener una idea de la diferencia de presión " p_c " y de la elevación manométrica " h_c " para la superficie de contacto estática agua-aire en sedimentos similares de finura creciente, extrayendo " h_c " y " p_c " de la ecuación (245) cuando se dan los diámetros granulares. Algunos de tales valores están trazados en la Tabla 1, de la que resulta claro que para sedimentos de gran permeabilidad la caída en altura manométrica poco probablemente exceda 1 metro, mientras que para sedimentos con caídas manométricas mayores que 1 metro las permeabilidades se vuelven desproporcionadamente pequeñas.

20. INFLUENCIA DE LA CAPILARIDAD SOBRE UNA SUPERFICIE DE CONTACTO DE 2 FLUIDOS.

En nuestro estudio anterior de superficies de contacto de fluidos supusimos que " p_c " era cero, de modo que en un mismo punto la presión contra la cual cualquiera de dos fluidos tendría que ser inyectado era la misma. También, se supuso que las presiones en puntos contiguos sobre lados opuestos de la superficie de contacto de fluidos eran las mismas. Ahora vemos que, si los dos fluidos son inmiscibles, siempre estarán separados por una superficie de contacto de fluidos y que sobre lados opuestos de la misma las presiones tendrán la diferencia " p_c ", donde " p_c " depende de la naturaleza de los fluidos y del medio en la forma ya indicada. Esto es igualmente cierto tanto para la superficie de contacto está entre cuerpos grandes segregados de los dos fluidos, como para la que está rodeando un pequeño volumen macroscópico de un fluido inyectado en una región ocupada por el otro.

TABLA 1

AUMENTO DE ALTURA MANOMÉTRICA Y PRESIÓN CAPILAR DE LA SUPERFICIE DE CONTACTO AGUA-AIRE EN SEDIMENTOS SIMILARES.

Tipo de roca	Diámetro " d " (Cm.)	Aumento de la Altura Manomé- trica "h _c " (Cm.)	Presión Capilar "p _c " (Dinas/Cm ²)
Grava	1	-3 X 10 ⁻¹	-3 X 10 ²
-----	10 ⁻¹	- 3	-3 X 10 ³
Arena	10 ⁻²	-3 X 10 ⁺¹	-3 X 10 ⁴
-----	10 ⁻³	-3 X 10 ²	-3 X 10 ⁵
Limo	10 ⁻³	-3 X 10 ²	-3 X 10 ⁵
-----	10 ⁻⁴	-3 X 10 ³	-3 X 10 ⁶
Arcilla	10 ⁻⁴	-3 X 10 ³	-3 X 10 ⁶

Para tratar con esta circunstancia solo es necesario extender nuestra definición de potencial del fluido como para incluir el trabajo contra la presión capilar interfacial. El potencial de cualquier fluido en cualquier región es entonces

$$\bar{\Phi} = gz + \int_{p_0}^{p+p_c} \frac{dp}{\rho}, \quad (249)$$

donde " ρ " es la densidad del fluido inyectado, " p " la presión del fluido que ocupa el punto en cuestión, y " p_c " la presión capilar

"contra" el fluido inyectado debido a las tensiones interfaciales de los dos fluidos en el punto de inyección. Para los mismos fluidos y medio, con el medio homogéneo en lo que respecta a textura y escala de tamaño, " p_c " puede ser tratado como una constante; de otra forma su variación como una función de posición debe ser tomada en cuenta.

Los potenciales de los dos fluidos en el mismo punto son ahora

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= gz + \int \frac{p + p_{c1}}{\rho_1} dt, \\ \Phi_2 &= gz + \int \frac{p + p_{c2}}{\rho_2} dt, \end{aligned} \right\} \quad (250)$$

Lo que para fluidos de densidades constantes se reduce a la forma más simple

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= gz + \frac{p - p_0}{\rho_1} + \frac{p_{c1}}{\rho_1} \\ \Phi_2 &= gz + \frac{p - p_0}{\rho_2} + \frac{p_{c2}}{\rho_2} \end{aligned} \right\} \quad (251)$$

Estas ecuaciones son análogas a la ecuación (1.83), y nuevamente podemos eliminar " $p - p_0$ " y extraer " z ", obteniendo

$$z = \frac{g}{g} \left(\frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \Phi_2 - \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \Phi_1 - \frac{p_{c2} - p_{c1}}{\rho_2 - \rho_1} \right). \quad (252)$$

También, si queremos, podemos observar que

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_{c1}}{\rho_2 - \rho_1} &= \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{p_{c1}}{\rho_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \bar{\Phi}_{c1}, \\ \frac{p_{c2}}{\rho_2 - \rho_1} &= \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{p_{c2}}{\rho_2} = \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \bar{\Phi}_{c2}, \end{aligned} \right\} \quad (253)$$

donde " $\bar{\Phi}_{c1}$ " y " $\bar{\Phi}_{c2}$ " son las partes de los dos potenciales debidas a la capilaridad. Insertando estas expresiones en la ecuación (252) tenemos que

$$z = \frac{1}{g} \left[\frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} (\Phi_2 - \bar{\Phi}_{c2}) - \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} (\bar{\Phi}_1 - \bar{\Phi}_{c1}) \right]. \quad (254)$$

Al establecer las ecuaciones (249) y (250) supusimos que ambos fluidos serían inyectados en el mismo punto en una región ocupada por el mismo fluido. Ahora, si "z" representa la elevación de un punto en la superficie de contacto 1,2, debemos pensar que ambos fluidos son inyectados sobre el mismo lado de la superficie de contacto existente contra una presión ya sea de " p_1 " o de " p_2 ", de uno u otro fluido.

Si la inyección es efectuada sobre el lado del fluido 1 contra la presión " p_1 ",

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_{c1}}{\rho_1} &= \bar{\Phi}_{c1} = 0, \\ \frac{p_{c2}}{\rho_2} &= \bar{\Phi}_{c2} \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (255)$$

O, si la inyección es efectuada sobre el lado de la superficie de contacto ocupado por el fluido 2 contra la presión " p_2 ",

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_{c1}}{\rho_1} &= \Phi_{c1} \neq 0, \\ \frac{p_{c2}}{\rho_2} &= \Phi_{c2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (256)$$

No ocasiona ninguna diferencia en los resultados cuál de estos juegos de relaciones empleamos, pero debemos usar uno o el otro.

Con este entendimiento obtenemos de la ecuación (252) o (254) la elevación de cualquier punto sobre una superficie de contacto de fluidos en el que son conocidos los potenciales correspondientes. Por ejemplo, si consideramos una superficie de contacto agua-aire y definimos nuestros potenciales en el lado de la superficie de contacto que corresponde al aire, haciendo que el aire sea el fluido de densidad " ρ_1 " y el agua el de densidad " ρ_2 ", entonces tanto " Φ_1 " como " Φ_{c1} " son sensiblemente iguales a cero, y

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{1}{g} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \cdot (\Phi_2 - \Phi_{c2}) \\ &= \frac{1}{g} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} (gh_2 - gh_{c2}) \cong h_2 - h_{c2}, \end{aligned} \right\} \quad (257)$$

donde " h_2 " es la altura manométrica acostumbrada del agua en la superficie de contacto en un tubo de diámetro suficientemente grande para que las fuerzas capilares sean negligibles, y " $-h_{c2}$ " es la elevación capilar debida a las fuerzas de las tensiones superficiales entre el aire, agua, y el medio en el punto dado. También,

$$\rho_2 / (\rho_2 - \rho_1) \cong 1.$$

El ángulo de pendiente de esta superficie de contacto es obtenible

por diferenciación:

$$\sin \alpha = \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{1}{g} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial s} - \frac{\partial \phi_{c2}}{\partial s} \right) \cong \frac{\partial h_2}{\partial s} - \frac{\partial h_{c2}}{\partial s}. \quad (258)$$

Si el medio es homogéneo y el agua está estática, " h_2 " = constante, " h_{c2} " = constante y la superficie serán horizontales. Si el medio es heterogéneo y el agua estática, " h_2 " = constante, " h_{c2} " \neq constante y la superficie será ondulatoria. En ripio grueso y espacios abiertos " h_{c2} " \cong 0, de modo que la elevación de la superficie se vuelve igual a " h_2 ". Cuando el agua no está estática pero fluye a través de un medio homogéneo, " h_{c2} " = constante y

$$\frac{\partial h_{c2}}{\partial s} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial z}{\partial s} \cong \frac{\partial h_2}{\partial s}. \quad (258a)$$

Por lo tanto, la pendiente de la superficie cuando la capilaridad es constante está relacionada con el índice de flujo, de igual manera que cuando la capilaridad es cero.

Para el caso más general la elevación " z " de la superficie de contacto es obtenible de la ecuación (254) cuando uno de los fluidos está estático. Hagamos que el fluido " ρ_2 " esté estático y tomemos los potenciales de su lado de la superficie de contacto.

Entonces

$$h_2 = h_{c2} = \text{constante},$$

$$h_{c2} = 0,$$

y

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{1}{g} \left[\frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \cdot z_{20} - \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} (\phi_1 - \phi_{c1}) \right] \\
 &= \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \cdot h_{20} - \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} (h_1 - h_{c1}),
 \end{aligned}
 \tag{259}$$

donde " h_{20} " = constante es la altura manométrica del líquido " ρ_2 ", " h_1 " es la del líquido " ρ_1 " y " h_{c1} ", que tanto puede ser negativa como positiva, es la elevación manométrica adicional del fluido " ρ_1 " debida a la capilaridad. Cuando ambos fluidos están estáticos y el medio es homogéneo, la superficie de contacto es horizontal; cuando el medio es heterogéneo, ésta es ondulatoria.

Para el estado más general de flujo estacionario el ángulo de pendiente de la superficie de contacto es obtenible por diferenciación de la ecuación (254):

$$\sin \alpha = \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{1}{g} \left[\frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial s} - \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial s} - \frac{\partial \phi_{c1}}{\partial s} \right) \right],
 \tag{260}$$

donde los potenciales son tomados sobre el lado " ρ_2 " de la superficie de contacto. Para un medio homogéneo, " $\partial \phi_{c1} / \partial s = 0$ " y la ecuación (260) se reduce a la ecuación (190) derivada para capilaridad cero.

De lo que antecede vemos que el efecto producido por la capilaridad sobre una superficie de contacto de fluidos es, principalmente, de mayor o menor distorsión con respecto a la configuración de la misma superficie de contacto para capilaridad cero. Mientras las diferencias de presión interfaciales debidas a la capilaridad entre pares de líquidos son, en la mayoría de los casos, menos que la de agua-aire, los desplazamientos verticales son iguales a las elevaciones manométricas " h_{c1} " o " h_{c2} " magnificadas por el factor " $\rho_1 / (\rho_2 - \rho_1)$ " o " $\rho_2 / (\rho_2 - \rho_1)$ ";

dependiendo de cuál fluido es tomado como referencia, lo que comúnmente es grande comparado con la unidad.

También, en rocas de grano extremadamente fino cuyas permeabilidades para propósitos ordinarios pueden ser negligibles, las presiones capilares pueden alcanzar a varias atmósferas. En el transcurso del tiempo geológico, entre cuerpos de otra forma estáticos, esta superficie de contacto migrará hacia una configuración de equilibrio. La distancia vertical de tal migración desde la posición correspondiente para " p_c " = 0 sería

$$z_c = + \frac{1}{g} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \phi_{c2} = + \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \cdot h_{c2} = + \frac{1}{g} \cdot \frac{p_{c2}}{\rho_2 - \rho_1} \quad (261a)$$

$$z_c = - \frac{1}{g} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \phi_{c1} = - \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot h_{c1} = - \frac{1}{g} \cdot \frac{p_{c1}}{\rho_2 - \rho_1} \quad (261b)$$

correspondiendo respectivamente a si el fluido considerado es el de densidad " ρ_2 " o el de " ρ_1 ". En cualquier caso la presión capilar es esa "contra" el fluido considerado, de modo que " p_{c2} " = " $-p_{c1}$ ".

Con " $\rho_1/(\rho_2 - \rho_1)$ " = 10 ésto alcanzaría a aproximadamente 100 metros por atmósfera. Aparentemente fenómenos de esta clase han jugado un papel significativo en la acumulación de petróleo, y son importantes en su extracción.

Para el caso dinámico en que uno o ambos fluidos están en movimiento uniforme a través de un medio homogéneo, no debe suponerse que la superficie de contacto es simplemente desplazada verticalmente en cantidad " $(1/g) p_c/(\rho_2 - \rho_1)$ " sobre o bajo su posición para " p_c " = 0. En este caso cualquier desplazamiento de la superficie de contacto ocasiona cambios correspondientes en la disposición del flujo y superfi-

cios de cortes transversales de los tubos de corriente. Esto resulta en un desplazamiento a lo largo de las líneas de flujo de las superficies equipotenciales, y todos estos diversos cambios afectan la nueva posición de equilibrio que, cuando las gradientes potenciales son grandes, solamente puede ser obtenida de la ecuación (254) o su equivalente.

21. EL NIVEL FREÁTICO

Un punto adicional tendría que recibir atención antes de dejar el tema de la capilaridad. Si, en cualquier punto dado en una región bajo la cual existe una capa de rocas permeables, se cava un pozo vertical no revestido, éste eventualmente alcanzará una profundidad en la que, y por debajo de la cual, el agua fluirá en el agujero y quedará en equilibrio estático. Ha llegado a ser práctica usual en hidrología de aguas subterráneas referirse a tal superficie de contacto estática aire-agua en un agujero abierto como la "lámina acuífera" en ese punto. Por lo tanto, la lámina acuífera representa una elevación por debajo de la cual el agua fluye libremente hacia dentro de un agujero no revestido, y por sobre la cual tal flujo no se produce.

Este hecho ha conducido, bastante naturalmente, a la concepción, también ampliamente usada por hidrólogos de aguas subterráneas, de que la lámina acuífera subterránea forma una superficie limitante entre una región inferior que está completamente saturada con agua y una región superior en la que la saturación es incompleta. De esta forma se concibe que la lámina acuífera es la superficie superior (excepto donde ésta está formada por rocas impermeables) de una "zona de saturación" y la superficie inferior de un "borde capilar" -una zona (en la que presumiblemente la saturación es incompleta) en la que el agua es sostenida por la capilaridad.

Ultimamente se ha reconocido que se produce flujo dentro de esta zona de "borde capilar" al igual que dentro de la "zona de saturación".

y se han sugerido investigaciones para determinar la forma de este flujo.

Así, mientras nuestros hechos relativos a la lámina acuífera están limitados a observaciones hechas dentro de agujeros u otros espacios grandes en el terreno, resulta claro que las concepciones con respecto a la lámina acuífera no están tan limitadas; y, en realidad, la lámina acuífera es concebida como una superficie continua (excepto donde las rocas son impermeables) cuya elevación coincide en todos sus puntos con la posición que la superficie de contacto agua-aire tomaría en un agujero abierto sin revestir "si hubiese una colocada en ese punto".

Nuestro interés principal aquí se centra sobre la cuestión de cuál es el significado físico, si existe alguno, de tal superficie en una región subterránea alejada de agujeros u otros espacios mayores que los de los poros del medio. Forma, en realidad, un límite entre una región inferior completamente saturada con agua y otra superior saturada incompletamente? Representa la superficie de contacto agua-aire? Forma alguna clase de límite reconocible que pueda ser distinguido visualmente en una región permeable limitada por una placa vertical de vidrio?

Las respuestas a todas estas preguntas están implícitamente contenidas en el tratamiento de la capilaridad que acabamos de hacer, y son verificables experimentalmente por medio de un aparato muy simple que contenga arena, agua y aire, con una o más paredes verticales de vidrio para observación visual y con salidas manométricas adecuadas.

La respuesta es que existe solamente una superficie de contacto aire-agua abierta y continua, a ambos lados de la cual pueden o no producirse burbujas de aire atrapadas en la región de otra forma saturada por el agua, y meniscos de agua similarmente atrapados y retenidos en la región de otra forma saturada por el aire. Aún más, las burbujas de aire y meniscos de agua aislados representan configuraciones inestables que desaparecerán espontáneamente, las burbujas de aire por solu-

ción y los meniscos de agua por evaporación, a menos que sean renovados por procedimientos ajenos a los actualmente considerados.

Para simplicidad, consideremos el ejemplo estático dado por una probeta de laboratorio grande, graduada, completamente llena con arena y parcialmente llena con agua. La superficie de contacto aire-agua será claramente visible (especialmente si el agua es colorada); y la inspección más minuciosa no indicará la posición de la lámina acuífera, porque ningún límite entre una zona de saturación completa y otra de saturación incompleta (aparte que la superficie de contacto aire-agua misma) será discernible; tampoco aparecerá ninguna superficie de cualquier otra discontinuidad física.

Si, por otra parte, conectamos tubos manométricos a cualquier parte de la región por debajo de la superficie de contacto aire-agua, todos registrarán la misma elevación "h" correspondiente a una región de potencial constante, "gh". Aún más, esta elevación "h" será precisamente la misma que la elevación de la lámina acuífera obtenida de un "pozo" efectuado dentro de la probeta, y será menor que la elevación " z_{12} " de la superficie de contacto aire-agua en una cantidad " h_c ", que es la disminución de la altura manométrica debida a la presión capilar del valor que alcanzaría si la presión capilar fuese cero.

Si ahora consideramos el campo de presión en la región por debajo de la superficie de contacto aire-agua, encontraremos, en este caso estático, que tenemos una familia infinita de superficies horizontales isobáricas con la presión decreciendo hacia arriba a razón de " $\rho_2 g$ " por unidad de longitud, donde " ρ_2 " es la densidad del agua. Aún más, la altura del agua en los tubos manométricos y en el "pozo" coincidirá precisamente con la superficie isobárica " $p = 1$ atmósfera. (En éste y los párrafos siguientes inmediatamente, el término "1 atmósfera" debe ser tomado como representando la presión atmosférica existente promedio, y no "1 atmósfera normal"). Por debajo de esta superficie la presión será mayor que 1 atmósfera; y por encima, entre ella y la

superficie de contacto aire-agua, la presión será menor que 1 atmósfera.

De ésto resulta claro que la lámina acuífera en este caso estático no es otra cosa que la superficie isobárica " p " = 1 atmósfera; y la así llamada "zona de saturación" comprende la región donde " p " > 1 atmósfera. Así también el "borde capilar" es la región entre la superficie isobárica " p " = 1 atmósfera y la superficie de contacto aire-agua, caracterizada por " p " < 1 atmósfera.

Mientras este caso estático más simple es empleado con propósito de ilustración, los resultados arriba expuestos no son alterados en ninguna manera cuando una gradiente potencial es aplicada sobre el sistema y el agua hecha fluir. La superficie isobárica " p " = 1 atmósfera, todavía es la lámina acuífera y en regiones subterráneas no representa discontinuidad física de ninguna clase.

Las superficies equipotenciales cruzan esta superficie isobárica sin interrupción y se extienden hasta la superficie de contacto aire-agua a cuyo través se refractan con una discontinuidad en la horizontal. El flujo de fluidos obedece precisamente las mismas leyes en la región donde " p " < 1 atmósfera y en la caracterizada por " p " > 1 atmósfera.

Por otro lado, si la superficie superior de la "zona de saturación" fuese vista como coincidente con la superficie de contacto aire-agua -como el término mismo sugiere que debiera ser- entonces no coincidiría con la lámina acuífera y estaría consistentemente por encima de esta superficie a una altura " h_c "; y no existiría un "borde capilar".

Por lo tanto, en cualquier caso quedamos sin otra alternativa que la de descartar la concepción de la lámina acuífera como una superficie de discontinuidad entre una "zona de saturación" y un "borde capilar" con características físicas fundamentalmente diferentes, como una ficción engañosa.

22. EL EFECTO DE LA TEMPERATURA Y DE LA PRESION SOBRE LAS PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS.

Aparte de los fenómenos de tensión superficial, las propiedades de los fluidos que entran en nuestras ecuaciones son la densidad y la viscosidad. Para un fluido homogéneo único estas dos propiedades son funciones de un valor de la temperatura y la presión. Para gases dentro del ámbito de validez de las leyes para los gases la viscosidad y la densidad son determinables por la teoría cinética de los gases. Para gases fuera de estos límites y para líquidos estas propiedades deben ser obtenidas experimentalmente.

En las regiones subterráneas que nos interesan, no existe solo un campo de presión sino que también existe un campo termal, dando lugar a las dos familias de superficies de campo: superficies isobáricas y superficies isotérmicas. Cada punto subterráneo estará ubicado sobre una de cada una de estas superficies, y en ese punto los valores de la densidad y viscosidad del fluido en cuestión serán los apropiados para la temperatura y la presión. Esto dará lugar a dos campos escalares -uno para viscosidad y otro para densidad- cada uno con sus superficies equiescalares apropiadas.

Estableciendo

$$\left. \begin{aligned} \eta &= f(T, p), \\ \rho &= F(T, p), \end{aligned} \right\} \quad (262)$$

y considerando que "T" y "p" son ambas funciones de posición subterránea, entonces a lo largo de cualquier trayecto "s"

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\eta}{ds} &= \frac{\partial \eta}{\partial T} \cdot \frac{dT}{ds} + \frac{\partial \eta}{\partial p} \cdot \frac{dp}{ds}, \\ \frac{d\rho}{ds} &= \frac{\partial \rho}{\partial T} \cdot \frac{dT}{ds} + \frac{\partial \rho}{\partial p} \cdot \frac{dp}{ds}. \end{aligned} \right\} \quad (263)$$

La integración de las ecuaciones (263) a lo largo del trayecto "s" desde una posición inicial "s₀" hasta una final "s" da los valores correspondientes de "η" y "ρ" en la posición final. Entonces,

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \eta_0 + \int_{s_0}^s \left(\frac{\partial \eta}{\partial T} \cdot \frac{dT}{ds} + \frac{\partial \eta}{\partial p} \cdot \frac{dp}{ds} \right) ds, \\ \rho &= \rho_0 + \int_{s_0}^s \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \cdot \frac{dT}{ds} + \frac{\partial \rho}{\partial p} \cdot \frac{dp}{ds} \right) ds. \end{aligned} \right\} \quad (264)$$

Para gases, estas dos ecuaciones deben ser tenidas en cuenta; pero para líquidos que son nuestra principal preocupación aquí,

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} \cong 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial p} \cong 0, \quad (264a)$$

de modo que "ρ" ≅ "ρ₀" o es lo suficientemente aproximado a constante para que, para la mayoría de los propósitos, se lo puede considerar como tal. La viscosidad para líquidos, sin embargo, no puede ser considerada constante dentro de los límites de temperaturas y presiones encontradas por pozos profundos.

En regiones de relieve topográfico suave y libres de anomalías térmicas, tales como fuentes calientes y actividad volcánica, las superficies isotérmicas son muy aproximadamente horizontales. En regiones similares, excepto localmente, donde altas gradientes potenciales pueden existir, las superficies isobáricas son aproximadamente horizontales. Bajo estas circunstancias, con bastante aproximación la presión y la temperatura son funciones de la profundidad solamente, y las superficies isotérmicas e isobáricas son substancialmente paralelas. También, el incremento de cada una de estas cantidades con la profundidad es aproximadamente lineal, y podemos establecer

$$p = -\rho g z + \text{constant} \quad (265)$$

$$T = -\Theta z + \text{constant} \quad (266)$$

donde "z" es la elevación del punto (negativa de la profundidad), " ρ " la densidad del agua, y " Θ " la gradiente geotérmica. En la mayoría de los pozos profundos se ha encontrado que la presión de fluidos es aproximadamente la dada por la ecuación (265) a pesar de que se conocen ciertos casos anómalos en los que la presión es mucho mayor.

Podemos considerar ahora el camino de integración de la ecuación (264) como vertical y substituir a "s" por "z". De las ecuaciones (265) y (266).

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g, \quad (267)$$

$$\frac{dT}{dz} = -\Theta. \quad (268)$$

Introduciendo éstas en la ecuación (264) para " η " resulta

$$\eta_z = \eta_0 - \int_{z_0}^z \frac{\partial \eta}{\partial T} \cdot \Theta \cdot dz - \int_{z_0}^z \frac{\partial \eta}{\partial p} \cdot \rho g \cdot dz. \quad (269)$$

Por mediciones en pozos profundos se encuentra que " Θ " varía algo ampliamente de un lugar a otro, pero para un pozo dado es aproximadamente constante, con un valor promedio de más o menos 3°C por 100 mts., o $3 \times 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^{-1}$. También " ρg " es aproximadamente constante, con el valor numérico de más o menos $10^3 \text{ gr. cm}^{-2} \text{ seg}^{-2}$.

Los valores de " $\partial \eta / \partial T$ " y " $\partial \eta / \partial p$ " para agua son obtenibles de los experimentos de Bridgman (13), que muestran que la magnitud del térmi-

no debajo de la segunda integral es menor que 10^{-3} la del término debajo de la primera integral. La segunda integral puede entonces ser enteramente descartada para el agua, quedando

$$\eta_z = \eta_0 - \int_{z_0}^z \frac{\partial \eta}{\partial T} \cdot \Theta \cdot dz = \eta_0 + \int_{T_0}^T \frac{\partial \eta}{\partial T} \cdot dT, \quad (270)$$

donde T_0 es la temperatura bajo presión atmosférica. Computando la temperatura aproximada como una función de la profundidad, la ecuación (270) da la viscosidad del agua como una función de la profundidad. Insertando esto en la ecuación para la conductividad específica resulta la forma en que ésta aumenta con la profundidad para un medio de permeabilidad uniforme. Estos valores están computados hasta profundidades de 3.000 metros y se los incluye en la Tabla 2, que muestra que, cuando se trata con el flujo de agua, la disminución de la viscosidad con la profundidad es equivalente a un aumento correspondiente de la permeabilidad a temperatura constante y debe ser tenida en cuenta.

TABLA 2

VARIACION DE LA VISCOSIDAD Y DE LA CONDUCTIVIDAD ESPECIFICA PARA EL AGUA CON LA PROFUNDIDAD.

Profundidad en metros	Temperatura en ° C.	Viscosidad del agua en unidades de viscosidad	Conductividad específica relativa
0	10	$1,308 \times 10^{-2}$	1
100	13	$1,207 \times 10^{-2}$	1,08
200	16	$1,112 \times 10^{-2}$	1,18
300	19	$1,032 \times 10^{-2}$	1,27
400	22	$0,961 \times 10^{-2}$	1,36
500	25	$0,894 \times 10^{-2}$	1,46
1.000	40	$0,656 \times 10^{-2}$	2,00
2.000	70	$0,406 \times 10^{-2}$	3,22
3.000	100	$0,284 \times 10^{-2}$	4,61

23. CAMPO DE FUERZA ROTACIONAL.

En el caso más general, donde tanto " η " como " ρ " varían apreciablemente con la temperatura y la presión y donde las superficies isotérmicas no son paralelas a las superficies isobáricas, las superficies de igual densidad -superficies "isodensas" - intersectarán las superficies isobáricas, y

$$\oint \frac{dp}{\rho} \neq 0. \quad (270a)$$

Cuando ésto ocurre, no es posible ningún potencial, rigurosamente hablando. Lo que ocurre físicamente en tal caso es que el campo de fuerza tiene una componente rotacional que tiende a establecer un flujo conveccional en el fluido. Esta clase de situación resulta de calentamiento desigual en diferentes partes del campo de flujo, causando que el fluido a la misma presión y diferentes temperaturas, tenga diferentes densidades.

Tal estado de flujo no es una violación a la conservación de la energía pero sí una evidencia de un intercambio entre energía termal y mecánica, produciendo una máquina térmica. La fuerza rotacional está comunmente superpuesta a un campo de fuerza potencial. En agua subterránea, mientras el campo de fuerza rotacional existe en ciertos casos, debido a la constancia aproximada de la densidad del agua, es tan pequeño, comparado con el campo de fuerza potencial, que es negligible.

24. COMPARACION DE LA PRESENTE TEORIA CON METODOS EMPLEADOS POR OTROS.

Esto concluye nuestro desarrollo teórico formal. Hemos intentado establecer, sobre sólidas bases físicas, una teoría del movimiento de un fluido homogéneo a través de medios permeables, susceptible de extensión para incluir el flujo de fluidos de la clase más general pero aquí restringida principalmente a líquidos y los problemas de aguas subterráneas. Al hacerlo, intencionadamente nos hemos confinado a dos restricciones importantes: que el flujo en cuestión fuera continua o estadísticamente uniforme durante el intervalo de tiempo considerado, y que el medio fuese isotrópico.

La razón para la primera de estas restricciones es evitar serias dificultades matemáticas encontradas al intentar el tratamiento de fenó-

menos transitorios. Estos implican el tratamiento de campos cuyas propiedades son funciones tanto de la posición como del tiempo. Mientras estos problemas pueden ser establecidos simplemente agregando el tiempo a las variables aquí consideradas, su solución es mucho más difícil que las correspondientes con movimiento uniforme. Además, la mayoría de los problemas de aguas subterráneas pueden ser reducidos a problemas de estados de flujo uniformes.

Recientemente Theis (14) ha estudiado el flujo no uniforme alrededor de un pozo con resultados muy promisorios, utilizando una analogía a la difusión del calor. Ha supuesto, erróneamente, sin embargo, que la presión es la analogía hidráulica de la temperatura.

La restricción de que el medio sea considerado isotrópico es en parte para evitar las dificultades matemáticas inherentes en el tratamiento de fenómenos anisotrópicos, y parcialmente en consideración al hecho de que casi todos los datos sobre permeabilidad son tomados en base a la misma presunción. El efecto de la anisotropía es producir una distorsión en el modelo del caudal con respecto al modelo correspondiente para condiciones isotrópicas del mismo campo potencial. Para medios isotrópicos las líneas de flujo son paralelas a "grad. ϕ "; para medios anisotrópicos forman un ángulo con esta dirección, la magnitud del cual depende del grado de anisotropía y de la dirección de "grad. ϕ " con respecto a los ejes de permeabilidad del medio.

Es importante ahora que comparemos el presente tratamiento con los de otros autores. Debe esperarse que los puntos de coincidencia excedan en mucho a los de desacuerdo, pero son estos últimos los de mayor importancia, porque son los que conducen a desacuerdos en las conclusiones alcanzadas y deben por lo tanto contener algunos de los errores que han sido cometidos.

25. POTENCIAL DE VELOCIDAD.

Desde los clásicos estudios de Slichter la mayoría de los autores que han estudiado analíticamente el movimiento de aguas subterráneas han tenido la impresión de que alguna clase de función potencial estaba envuelta en la cuestión y han tratado de formular esta función. El enfoque de este problema ha sido hecho usualmente comenzando por las concepciones de hidrodinámica clásica y suponiendo que la función potencial buscada era un "potencial de velocidad".

A este respecto debería explicarse que un potencial de velocidad es la integral lineal de velocidad a lo largo de un trayecto en el campo de flujo, tal como un potencial de fuerza es la integral lineal de una fuerza. Entonces, si un potencial de velocidad existe en un campo de flujo, su valor en cualquier punto es

$$\Omega = \Omega_0 - \int_{s_0}^s q \cos \theta \cdot ds, \quad (271)$$

donde " Ω_0 " es el potencial de velocidad del punto inicial y " Ω " el del final, " q " la magnitud de la descarga específica o vector de velocidad, y " θ " el ángulo entre la dirección del flujo y el desplazamiento " ds ".

Slichter afirmó que la presión hidrostática tenía la propiedad de un potencial de velocidad en movimiento de aguas subterráneas, y que las superficies isobáricas eran concordantemente normales a las líneas de flujo. Después, sin embargo, violó su propia proposición al tratar un problema en el que mostró a las superficies isobáricas formando toda clase de ángulos desde normal a tangencial con las líneas de flujo relacionadas.

Desde ese tiempo parece haber sido más la regla que la excepción que los autores emplearan la presión como una función potencial, y que es-

cribieran lo que se presentó como Ley de Darcy en la forma

$$q_s = -K' \cdot \frac{\partial p}{\partial s}, \quad (271a)$$

cuya invalidez ya ha sido mostrada.

Aún cuando la Ley de Darcy ha sido correctamente expresada en la forma

$$q_s = -k \cdot \frac{\partial h}{\partial s}, \quad (271b)$$

uno de los errores más comunes ha sido el de suponer que tubos manométricos diferentes para los que las alturas "h" son iguales deben ser terminados sobre la misma superficie isobárica.

Dachler, quien emplea la forma correcta de la Ley de Darcy, expresa que

$$q_x = -k \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\partial(Kh)}{\partial x}, \text{ etc.}, \quad (271c)$$

y concluye que (Kh) tiene por lo tanto las propiedades de un potencial de velocidad.

Muskat primero expone la Ley de Darcy en la forma errónea

$$q_s = -\frac{k}{\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial s}, \quad (271d)$$

pero después, para el estudio de problemas generales de terreno, usa

$$\Omega = \frac{k}{\eta} (p + \rho g z) \quad (271e)$$

como un potencial de velocidad, del cual

$$q_x = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \text{ etc.} \quad (271f)$$

La misma presunción ha sido afirmada explícitamente por Gardner, Collier, y Farr (15), quienes dicen en su frase inicial: "Como fue señalado originalmente por Slichter, la generalización de la Ley de Darcy no es nada más ni nada menos que el criterio de la existencia de un potencial de velocidad para la velocidad macroscópica de la humedad en el suelo". Expresan entonces que la cantidad

$$\sigma \phi = \sigma \left(gz + \frac{p}{\rho} \right) \quad (271g)$$

es un potencial de velocidad.

El problema inherente a todos los enfoques del movimiento de aguas subterráneas por medio del empleo de un potencial de velocidad resulta de la presunción básica de que existe un potencial de velocidad. La condición necesaria y suficiente para la existencia de un potencial de velocidad es que para todos los trayectos cerrados en una región singularmente conectada

$$\oint q \cos \theta \cdot ds = 0. \quad (272)$$

Si esta integral no es cero, no existe ningún potencial de velocidad y cualquier empleo de una función que supuestamente sea un potencial de velocidad para tal región es necesariamente erróneo.

En este respecto es importante notar que en hidrodinámica clásica, donde se originó la concepción de un potencial de velocidad, los únicos fluidos a los que es aplicable son fluidos sin fricciones, idealizados. En fluidos reales para los que la fricción no es negligible la

integral lineal alrededor de una curva cerrada deja de ser cero, y el movimiento no es derivable de un potencial de velocidad.

De este solo hecho, la presunción de que el agua subterránea posee un potencial de velocidad parecería ser de validez dudosa, ya que aquí la fricción es una influencia dominante. En una escala microscópica no hay cuestión, un potencial de velocidad no puede existir, pero si ésto es también cierto macroscópicamente requiere mayor investigación.

Una prueba de la validez de esta presunción es dada por el flujo rectilíneo de agua entre vasos, a través de un prisma de arena. Hagamos que el prisma esté dividido en dos secciones por un plano paralelo a su eje, una sección que contenga arena de permeabilidad " k_2 " y la otra " k_1 ", donde " k_2 " > " k_1 ". Las líneas de flujo serán paralelas a la superficie de contacto de la arena; pero en la arena de permeabilidad " k_2 " la descarga específica tendrá la magnitud " q_2 ", y en la de permeabilidad " k_1 " la magnitud de la descarga será " q_1 ".

Hagamos que "A" sea un punto al final del prisma de arena en el vaso corriente abajo, y "B" un punto correspondiente en el vaso corriente arriba. Supongamos que existe un potencial de velocidad, y que su valor en "A" es " Ω_A ". Entonces en "B"

$$\Omega_B = \Omega_A - \int_A^B q \cos \theta \cdot ds. \quad (273)$$

Evaluemos ahora esta integral a lo largo de dos caminos separados:

(1) Desde "A" el camino sigue la normal a las líneas de flujo hasta que una línea de flujo a través de la región " k_1 " es encontrada.

Entonces sigue esta línea de flujo hasta que alcanza la normal que pasa a través de "B"; desde ahí a lo largo de esa normal hasta "B".

(2) Para el segundo camino procedemos, como antes, a lo largo de una normal a las líneas de flujo desde "A", entonces a lo largo de una

línea de flujo en la región " k_2 " hasta que encontramos la normal que pasa a través de "B", y finalmente a lo largo de ésta hasta el punto "B". En ambos casos la distancia "l" a lo largo de las líneas de flujo es la misma. Cuando seguimos las líneas de flujo, " θ " es 180° , cuyo coseno es -1 ; y cuando seguimos las normales a las líneas de flujo " θ " es 90° , cuyo coseno es cero.

Por estos caminos separados los valores del potencial en "B" son

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{B_1} &= \Omega_A + q_1 \cdot l, \\ \Omega_{B_2} &= \Omega_A + q_2 \cdot l, \end{aligned} \right\} \quad (274)$$

de donde

$$\Omega_{B_2} - \Omega_{B_1} = (q_2 - q_1)l \neq 0 \quad (275)$$

y

$$\oint q \cos \theta \cdot ds \neq 0. \quad (275a)$$

Esto nos muestra claramente que en este caso especial no es posible ningún potencial de velocidad y que el valor en "B" del potencial de velocidad supuesto depende del camino recorrido.

Encontramos un caso más general si tomamos los puntos "A" y "B" sobre la superficie de contacto entre dos arenas de permeabilidades " k_1 " y " k_2 ", a través de la cual las líneas de flujo pasan oblicuamente. Comenzando en "A" recorreremos la normal a las líneas de flujo en la región " k_1 " hasta que alcanzamos la línea de flujo que pasa a través de "B". Seguimos a ésta hasta "B" y entonces a la normal a

las líneas de flujo que pasa a través de "B" en la región " k_2 " hasta que encontramos a la línea de flujo que atraviesa a "A". Regresamos a "A" a través de ésta.

Si hacemos que " γ_1 " y " γ_2 " sean los ángulos entre las líneas de flujo y las normales a la superficie en las dos regiones, entonces por la ley tangencial de refracción, cuando " k_2 " > " k_1 ",

$$" \gamma_2 " > " \gamma_1 " , \text{ y } " q_2 " > " q_1 " .$$

La integral lineal alrededor del camino descrito es entonces

$$\oint q \cos \theta \cdot ds = \pm AB(q_2 \sin \gamma_2 - q_1 \sin \gamma_1) \neq 0, \quad (276)$$

de modo que para este caso tampoco existe ningún potencial de velocidad.

Mientras es posible llegar a una generalización por extensión del método de análisis precedente, podemos hacerlo mejor regresando a nuestras ecuaciones fundamentales. Las expresiones para un potencial de velocidad empleadas por Dachler, por Muskat, y por Gardner, Collier y Farr son todas equivalentes y se relacionan con el potencial de fuerza " ", como aquí se lo emplea, en la siguiente forma:

$$\Omega = kh = \frac{k}{\eta} (p + \rho gz) = \sigma \Phi. \quad (277)$$

De la definición de un potencial de velocidad, si existiese,

$$q = -\text{grad } \Omega = -\text{grad } (\sigma \Phi), \quad (277a)$$

que no es otra cosa que la ecuación (136) cuya invalidez ya se ha mostrado como expresión general de la Ley de Darcy.

El mismo resultado se obtiene si ejecutamos la integral lineal alrededor de un trayecto cerrado:

$$\oint q \cos \theta \cdot ds = - \oint \sigma \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial s} \cdot ds, \quad (278)$$

la que, si existe un potencial de velocidad, debe ser cero para todos los trayectos posibles.

Pero ya sabemos que para todos los casos en los que " Φ " es determinada, es decir, cuando la densidad del fluido es una función de su presión solamente de modo que sus superficies isopícnicas e isobáricas son mutuamente paralelas,

$$\oint \frac{\partial \Phi}{\partial s} \cdot ds = 0. \quad (279)$$

Esta propiedad de " Φ " es enteramente independiente de cualquier propiedad del medio, sea éste homogéneo o no homogéneo, isotrópico o anisotrópico, y de si el trayecto cerrado es confinado a la región del fluido en cuestión o hace excursiones a regiones ocupadas por otros fluidos. Por ésto, para que la ecuación (278) sea cero, es necesario que " σ " sea eliminado del integrando, lo que es permisible solamente siempre que el valor de " σ " sea independiente de la posición en el campo y de la dirección del flujo. Como " σ " = " $k\rho/\eta$ ", estas condiciones son satisfechas cuando " $k\rho/\eta$ " = constante. Es también necesario que el valor de " k " sea independiente de la dirección del flujo, es decir, que el medio sea isotrópico. Como " k ", " ρ " y " η " son todas variables independientemente, ésto requiere que todas las tres separadamente deban permanecer constantes.

Por ésto, un potencial de velocidad existe solamente para campos de flujo que comprendan un flujo de densidad y viscosidad constantes y un medio en su totalidad homogéneo e isotrópico. Como estas diversas condiciones se obtienen solamente en problemas de laboratorio especialmente establecidos que se refieran a líquidos, y no son logradas

ni siquiera aproximadamente cuando se emplean fluidos de densidad y viscosidad variables, ni en problemas de aguas subterráneas que comprenden amplios márgenes de permeabilidad, resulta claro que la concepción del potencial de velocidad de la Ley de Darcy es inadecuada. Físicamente, además de poseer un margen extremadamente reducido de validez, la concepción del potencial de velocidad tiene sólo significación cinemática y no dá absolutamente ninguna visión interior de las propiedades dinámicas del flujo; matemáticamente, no tiene ventajas sobre la expresión dinámica más general aquí deducida ya que representa sólo un caso especial de esta última. La expresión dinámica, por el contrario, es de validez ilimitada, aplicable al flujo de fluidos de densidad y viscosidad variables a través de medios de permeabilidad variable. Para medios anisotrópicos mantiene su validez siempre que el parámetro de permeabilidad sea expresado en la forma de un tensor en lugar del "k" escalar de los medios isotrópicos.

26. LA SUPERFICIE PIEZOMÉTRICA.

Otro recurso que es extensamente empleado en prácticas de aguas subterráneas es la "superficie piezométrica". Frecuentemente existe en profundidad un estrato de roca tal como arenisca o caliza porosa de alta permeabilidad, cubierto por rocas de ligera permeabilidad. Los pozos que terminan en estas rocas superiores rinden escasamente, mientras los que llegan al estrato de alta permeabilidad rinden más abundantemente. Este hecho enfoca la atención sobre las propiedades hidrológicas del acuífero, y los pozos que lo alcanzan pueden ser empleados como tubos manométricos en adición a su función como pozos.

En un pozo vertical particular terminado sobre la parte superior de tal acuífero el agua se elevará hasta una altura estática "h" por sobre el nivel básico de elevación. Ahora, si imaginamos un gran número de tales pozos perforados hasta la parte superior del acuífero y utilizados como tubos manométricos verticales, las alturas "h" varia-

rán con la posición, pero en cualquier tiempo dado yacerán sobre una superficie suave, " $h(x,y)$ ", donde " x " e " y " son las co-ordenadas horizontales de los pozos. Esta superficie es lo que se conoce como la "superficie piezométrica".

Ahora resulta claro que en cada pozo la altura " h " dá el potencial " Φ " = " gh " en el término inferior de ese pozo, y un conocimiento completo de la superficie piezométrica de cualquier horizonte estratigráfico dado sobre un área dada nos permite determinar completamente los potenciales en todos los puntos sobre ese horizonte del área correspondiente. Pueden entonces dibujarse líneas de igual potencial sobre el horizonte subterráneo; y desde éstas, por medio de la Ley de Darcy, si la permeabilidad del acuífero es conocida, puede determinarse la componente del flujo tangencial a su superficie superior.

Mientras éste es un procedimiento de gran importancia práctica, tiene también serias limitaciones que deben ser completamente entendidas si deben evitarse errores importantes. Debe tenerse claramente en mente que el campo potencial y el campo de flujo de aguas subterráneas son campos tridimensionales que ocupan todo el espacio desde la superficie de contacto agua-aire hasta profundidades infinitas, y que todo lo que hemos hecho es determinar el valor de este campo tridimensional sobre una superficie bi-dimensional arbitraria a través de ese campo. Las líneas equipotenciales sobre esta superficie son, por lo tanto, sólo los trazos de las superficies equipotenciales que han sido intersectadas por ella.

En la práctica se acostumbra usar la superficie piezométrica, no como un medio para obtener el potencial de puntos sobre la superficie subterránea, pero directamente, suponiendo que la componente de la gradiente potencial sobre la superficie subterránea es proporcional a la pendiente de la superficie piezométrica misma, o que

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial h}{\partial r}, \quad (280)$$

donde "s" es una longitud sobre la superficie subterránea y "r" su proyección vertical sobre una superficie horizontal. Esto es rigurosamente cierto si la superficie de estratificación considerada es horizontal, pero si "s" tiene un ángulo de pendiente "α", entonces

$$s = \frac{r}{\cos \alpha}$$

y

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial h}{\partial r} \cdot \cos \alpha. \quad (281)$$

De aquí que tal presunción no sea válida para ángulos de pendientes mayores que aproximadamente 3°, a pesar de que en la mayoría de los casos las pendientes consideradas son en realidad menores que esto.

Un peligro más serio radica en las presunciones tácitas que comúnmente se efectúan cuando se computa el flujo desde la geometría de la superficie piezométrica. Estas son que el acuífero está limitado por arriba y por abajo por rocas tan impermeables que las componentes normales del flujo a través de estas superficies limitantes son negligibles, de modo que las componentes tangenciales son esencialmente el flujo total, y las líneas de flujo desde la parte superior al fondo del acuífero son paralelas a sus caras limitantes. El flujo postulado es, por lo tanto, paralelo a un solo plano, y los potenciales sobre una cara del acuífero son los mismos que los potenciales sobre todos los otros planos paralelos a ésta.

Nuevamente, en muchos casos estas presunciones son buenas aproximaciones; pero deben ser hechas con conocimiento y cuidado, porque hay muchos otros casos en los que no son ni aproximadamente correctas. Si, por ejemplo, se terminan dos pozos separados con descargas iguales

en un acuífero laminar horizontal cuyas superficies superior e inferior son completamente impermeables, -uno de los pozos como un punto de desagüe extendida desde el límite superior hasta el fondo del acuífero- los potenciales a lo largo de la superficie superior del acuífero y las superficies piezométricas correspondientes serán bastante diferentes en los dos casos. En el caso de la línea de desagüe trataremos con un problema de flujo radial plano con potencial logarítmico. Para el punto de desagüe, en su vecindad inmediata el flujo será hemisféricamente radial y el potencial aumentará con la primera potencia inversa de la distancia. A distancias mayores ésto se transformará gradualmente en flujo plano con potenciales logarítmicos. Mientras los potenciales son obtenibles de la superficie piezométrica en ambos casos, los métodos para análisis a ser empleados para computar el flujo son bastante distintos.

No es poco común encontrar sobre una superficie piezométrica los llamados "altos" piezométricos -el gran alto meridional, el alto Tampa, y otros en el mapa piezométrico basado sobre la caliza Ocala en Florida (16), por ejemplo. Estos consisten de grandes "montículos" sobre la superficie piezométrica o de regiones subterráneas donde las líneas equipotenciales sobre la superficie del acuífero contienen áreas de mayor potencial. Como, en tal caso, la componente del flujo paralela a la superficie superior del acuífero está radialmente hacia afuera del "alto", una de dos cosas debe ocurrir: debe crearse agua en la región del alto, o debe estar entrando agua en esa región a través de sus superficies superior o inferior. La última, por supuesto, es la situación real. Tales ejemplos sólo muestran conspicuamente que la presunción de límites superiores o inferiores impermeables con una componente de flujo normal cero de un acuífero importante no es sostenible.

Estos ejemplos ilustran la precaución que debe observarse al extraer conclusiones de una superficie piezométrica. Se demuestra en tratados que se refieren a la teoría matemática de las funciones potenciales que

en una región cuya geometría y propiedades físicas fijas -en este caso la permeabilidad- son conocidas completamente, es posible determinar el potencial en todos los puntos del campo cuando su valor en todos los puntos sobre una superficie que pase a través de ese campo es conocido. Este es precisamente el problema encerrado cuando una superficie piezométrica es dada. En casos muy simples, tales como el flujo regional a través de un acuífero, bastan cálculos simples. Sin embargo, cuando se tratan anomalías locales, tales como las perturbaciones debidas a pozos, fuentes, canales y similares, el método de cálculo debe ser correctamente adaptado a la geometría del problema particular considerado, pues de otra forma los resultados obtenidos no serán dignos de confianza.

Entre quienes emplean la superficie piezométrica como un recurso para determinar el flujo regional, muchas de estas dificultades son reconocidas; y en varias ocasiones se ha hecho la afirmación de que para problemas que involucran flujo en tres dimensiones se requerirían una infinidad de superficies piezométricas.

Mientras un procedimiento tal puede no ser imposible, las dificultades inherentes a él son bastante formidables. Suponiendo que se conozca completamente la permeabilidad de todo el campo, todo lo que es directamente determinable (sin recurrir a consideraciones extrañas) de una superficie piezométrica correspondiente a un plano dado que intersecte el campo de flujo, son las componentes paralelas a ese plano del vector de flujo en todos los puntos del plano. Para obtener el vector de flujo resultante en cualquier punto, deben conocerse tres componentes vectoriales no co-planares. Estas necesitan del uso de tres superficies piezométricas correspondientes a tres planos no paralelos que se intersecten en un punto dado. Entonces, para todos los puntos en el campo de flujo sería necesario tener el conjunto de superficies piezométricas que correspondan a tres familias infinitas de planos, una familia paralela, respectivamente, a cada uno de los pla-

nos no paralelos a través del punto inicial -un triple infinito en total.

Pero, antes de poder construir estas familias de superficies piezométricas, debemos conocer el valor de "h", y por tanto el de " $\phi = gh$ ", en todos los puntos del campo. Si sabemos ésto, sin embargo, podemos resolver el problema directamente desde las gradientes potenciales conocidas por medio de la Ley de Darcy, y no se requiere ninguna superficie piezométrica.

27. LA CONDICION PARA EL AGUA ARTESIANA.

En este punto es pertinente insertar un comentario con respecto a las condiciones para los pozos artesianos. Como el agua siempre fluye desde regiones de mayor potencial a las de potencial menor, si terminamos un extremo de un tubo abierto en un punto " P_1 " en un campo de flujo de agua subterránea, y el otro extremo en " P_2 ", dentro o fuera del campo, el agua fluirá a través del tubo desde " P_1 " hacia " P_2 " siempre que el potencial " ϕ_1 " en " P_1 " sea mayor que " ϕ_2 " en el punto " P_2 ". La única excepción a ésto se produce cuando el trayecto recorrido por el tubo es tal que se involucran presiones negativas del fluido, como en el caso de un sifón demasiado alto.

Con ésto en mente, si tomamos el punto " P_2 " sobre la superficie del terreno y queremos agua artesiana en ese punto, todo lo que se necesita es encontrar un punto " P_1 " dentro del campo de agua subterránea en el que el potencial " ϕ_1 " sea mayor que " ϕ_2 ", y conectar estos dos puntos por un tubo de extremos abiertos arreglado de tal forma que no existan presiones negativas. Se producirá entonces flujo artesiano en " P_2 ". Si restringimos la ubicación de " P_1 " a una línea vertical a través de " P_2 ", entonces es necesario y suficiente que un potencial mayor que " ϕ_2 " exista en algún lugar a lo largo de esta línea debajo de la superficie de contacto aire-agua si debe producirse flujo artesiano en " P_2 ".

La variedad de situaciones hidrológicas que darán lugar a potenciales bajo la superficie del terreno, superiores a potenciales unos pocos pies por encima, es muy grande. Una de éstas es la familiar ilustración en los libros de texto del acuífero que aflora en tierras altas y después pasa bajo la llanura por debajo de estratos impermeables, de la que un ejemplo típico es brindado por la arenisca de Dakota bajo las grandes llanuras. Mientras ésta es una condición suficiente para el agua artesianas, no es en absoluto una condición necesaria, y su uso extensivo ha oscurecido un entendimiento más completo de los fenómenos artesianos.

En realidad, para poder tener potenciales artesianos, un acuífero no necesita estar cubierto por material impermeable, ni necesita aflorar. Más aún, si aflora, el área de afloramiento puede ser tanto una región de descarga como una de entrada. Todos estos puntos, como lo ha señalado Paige (17), son ilustrados por la caliza Ocala de Florida. En gran parte de la región Sur y Este del estado, el agua de este acuífero está bajo potenciales artesianos; sin embargo su área de afloramiento está cerca del nivel del mar y es una región de descarga. El agua en la formación por flujo hacia abajo a través de 500 y más pies de formaciones menos permeables y más jóvenes, desde regiones que topográficamente son más altas que las áreas artesianas.

Si alguna vez se hiciese practicable la perforación de pozos inclinados u horizontales, se podría obtener agua artesianas en muchos lugares donde no puede ser obtenida por perforaciones verticales.

20. EL PROBLEMA DE LA PERMEABILIDAD.

Cuando Darcy estableció experimentalmente por medio del flujo del agua a través de arenas filtrantes la relación de la ecuación (8),

$$q = -k \cdot \frac{dh}{dl},$$

destacó que "K" era un "coeficiente que dependía de la permeabilidad del lecho" (de arena). Investigando el flujo de todas formas de fluidos a través de medios homogéneos e isotrópicos, pudimos mostrar en la ecuación (74) que la expresión completa para el flujo de cualquier clase de fluido bajo cualquier condición (sujeta sólo a la restricción de que la velocidad fuera lo suficientemente pequeña para poder despreciar las fuerzas debidas a la inercia) está dada por

$$q = -Nd^2\rho \cdot \frac{1}{\eta} \cdot g \cdot \frac{\partial h}{\partial l}, \quad (281a)$$

la que, comparada con la ecuación (8), muestra que

$$K \equiv Nd^2\rho \cdot \frac{1}{\eta} \cdot g = k\rho \cdot \frac{1}{\eta} \cdot g, \quad (281b)$$

donde " $k \equiv Nd^2$ " y es la única de las cuatro cantidades precedentes que es una propiedad del medio, siendo los factores restantes propiedades del fluido y del campo gravitacional en el punto de experimentación.

La ecuación (74), aún cuando fue desconocida a Darcy mismo, es simplemente una generalización del caso especial que él investigó. De conformidad con el empleo establecido, es la ecuación general, más que el caso especial, la que constituye la "Ley de Darcy". Consecuentemente, en lo que sigue, cuando el término "Ley de Darcy" es empleado, debe entenderse que representa la relación general de la ecuación (74) o su equivalente. Cualquier otra expresión que dé a entender que es la Ley de Darcy pero no sea equivalente a la ecuación (74) puede ser mostrada como físicamente errónea ó incompleta, es decir, una expresión que es físicamente correcta en su alcance, pero que está limitada en su validez a un margen más estrecho de fenómenos.

La identificación de la ecuación (8) con la ecuación (74) es sólo permisible siempre que interpretemos que la primera es una expresión completa de la Ley de Darcy. Solamente bajo esta condición estaremos

en condiciones de expandir el parámetro "K" en los factores componentes "k", " ρ ", " $1/\eta$ " y "g".

En esta forma expandida de "K" nos vemos confrontados nuevamente con el problema de cuál combinación de estos cuatro factores debe representar el elemento esencial de un coeficiente de permeabilidad. La afirmación de Darcy de que "K" es un "coeficiente que depende de la permeabilidad" de la arena sugiere claramente que "k" mismo no es el coeficiente de permeabilidad pero sí una función de ese coeficiente. ¿Qué es, entonces, el coeficiente de permeabilidad de la arena?

Las tentativas para responder esta pregunta han conducido a más desacuerdos y confusión que quizá cualquier otro problema de hidrología de aguas subterráneas. Como resultado, tenemos actualmente unas cuatro o cinco cantidades físicamente diferentes -es decir, dimensionalmente distintas- llamadas por el mismo nombre: el "coeficiente de permeabilidad". En adición a esto, se han señalado una docena o más de juegos diferentes de unidades físicas como los correctos en cuyos términos deben medirse los diferentes coeficientes.

Si esta clase de confusión debe ser eliminada, esto puede lograrse solamente llegando a un acuerdo sobre qué concepto queremos que signifique el término "permeabilidad", y entonces determinando un coeficiente que varíe como función de la permeabilidad seleccionada y de nada más. La base de tal coeficiente de permeabilidad debe necesariamente ser alguna combinación de los cuatro factores, "k", " ρ ", " $1/\eta$ " y "g" tomados desde uno a cuatro a la vez, porque éstos son los únicos factores que afectan al índice del flujo. Recíprocamente, la elección de cualquier combinación de estos cuatro factores únicamente determina una definición particular de la permeabilidad.

Podríamos comenzar tratando de definir las distintas concepciones que pueden ser llamados "permeabilidad" y después determinar qué combinación de los factores citados varía en función de cada una, pero es mucho más simple proceder en la manera inversa y hacer que las combina-

ciones de "k", " ρ ", " $1/\eta$ " y "g", tomados desde uno hasta cuatro a la vez, sirvan para definir las diferentes concepciones posibles de permeabilidad. Como existen sólo quince de tales combinaciones, todas dimensionalmente distintas, entonces el número máximo de "permeabilidades" diferentes posibles es quince.

Desde el tiempo de Darcy parece haber existido acuerdo general de que la permeabilidad es, en parte al menos, una propiedad del medio. Entonces, si dos arenas, una gruesa y la otra fina, son utilizadas, y " ρ ", " η " y "g" son mantenidos constantes, para el mismo valor de " dh/dl " el flujo tendrá un índice mayor a través de la arena gruesa, a la que se llamará por lo tanto la más permeable de las dos. Como, en este caso, sólo el factor "k" ha sido variado, se deduce que cualquier coeficiente de permeabilidad debe contener el factor "k" como un elemento esencial, irrespectivamente de los demás que contenga. Esto reduce nuestras concepciones diferentes posibles de permeabilidad al número de combinaciones que se pueden formar con "k" de los factores " ρ ", " $1/\eta$ " y "g" tomados desde cero hasta tres a la vez, o un total de ocho.

La opinión contemporánea preponderante parece favorecer la concepción de que la permeabilidad es una función sólo del medio; es decir, para un medio dado la permeabilidad es una propiedad fija independiente de la intensidad de la gravedad, de las propiedades del fluido que fluye a través de él, y de si fluye o no algún fluido a través suyo. De las ocho combinaciones con "k" de los factores " ρ ", " $1/\eta$ " y "g", la única que satisface esta condición es "K" misma, que depende de las condiciones geométricas del medio solamente -su forma interna y su escala de tamaño- y tiene las dimensiones (L^2).

Por lo tanto, si elegimos a "k" como nuestro coeficiente de permeabilidad, únicamente determinamos que la permeabilidad debe ser una propiedad del medio de nada más. La recíproca, sin embargo, no es cierta; si decidimos que la permeabilidad es una propiedad sólo del medio, un coeficiente que represente este hecho no es únicamente determinado,

porque, en adición a "k" mismo, cualquier función con valor único, $II = f(k)$, donde II es el coeficiente de permeabilidad, también puede ser hecha servir. Todo lo que se necesita es que para cualquier valor dado de "k" que corresponda a un medio particular, el valor de II deba ser únicamente determinado. Este hecho nos permite resolver la anomalía que se presenta cuando dos coeficientes de permeabilidad ampliamente diferentes, ambos susceptibles de ser mostrados como propiedades sólo del medio, son empleados.

Como existe un número ilimitado de funciones de "k" con valor único, quedamos con una cantidad ilimitada de posibles elecciones para nuestro coeficiente de permeabilidad final. Para esta elección nos interesan solamente los dictados de la conveniencia. De todas las funciones de "k" con valor único, indudablemente la más simple es la identidad

$$II \equiv k, \quad (282)$$

cuyas dimensiones son (L^2) , y éste es el coeficiente que recomendaremos aquí.

Resta sólo el problema de la elección de unidades adecuadas de medida; y otra vez, si queremos obtener simplicidad y evitar confusiones, el mejor procedimiento es adherirse estrictamente a las unidades fundamentales y a las unidades derivadas consistentes del sistema métrico o del sistema inglés. En el sistema métrico la unidad de "k" es el centímetro cuadrado; en el sistema inglés el pie cuadrado. El factor de conversión de la unidad inglesa a la unidad métrica es simplemente el número de centímetros cuadrados por pie cuadrado, o 929,0.

Expresado de esta manera abstracta, el centímetro cuadrado como unidad de permeabilidad parece tener poco significado. Esta oscuridad desaparece, sin embargo, si sustituimos " $\partial\phi/\partial l$ " por " $g(h/l)$ " en la ecuación (74) y extracemos a "k"

$$k = - \frac{q\eta}{\rho \cdot \frac{\partial \phi}{\partial l}} \quad (282a)$$

Entonces, si igualamos todos los miembros del término a la derecha a sus valores unitarios, obtenemos para el valor unitario de "k":

$$k [\text{cm}^2] = \frac{[(\text{cm}^3/\text{seg})/\text{cm}^2] [\text{gm}/\text{cm}\cdot\text{seg}]}{(\text{gm}/\text{cm}^3 (\text{cm}/\text{seg}^2))} \quad (283)$$

Expresado en palabras, un medio tiene una permeabilidad de 1 cm^2 cuando un fluido cuya viscosidad es 1 poise y cuya densidad es $1 \text{ gm}/\text{cm}^3$ fluye a través de él con una descarga específica de $1 (\text{cm}^3/\text{seg})/\text{cm}^2$ bajo una fuerza impulsora de 1 dina por gramo.

Como no tenemos disponibles mediciones directas de las permeabilidades de sedimentos expresadas en centímetros cuadrados, de las que podríamos obtener una idea del orden de magnitud de esta unidad, poseeremos nuevas consideraciones al respecto hasta que hayamos tratado otro aspecto de nuestro estudio.

Mientras es impracticable prestar atención a todos los diversos coeficientes de permeabilidad que han sido propuestos, hay dos que merecen atención individual: éstos son el del "Ground Water Division of the United States Geological Survey", que es el más ampliamente usado por hidrólogos de aguas subterráneas, y el propuesto originalmente por Dutton, que es el más extensamente empleado por los ingenieros petroleros.

La unidad de la Ground Water Division fue sugerida por Meinzer (18) y se la define como sigue:

"Los resultados de los experimentos son expresados como un coeficiente de permeabilidad, lo que está basado en la Ley de Darcy que el

índice de flujo varía en proporción directa con la gradiente hidráulica. El coeficiente de permeabilidad de un material es el índice de flujo (de agua) en galones por día, a través de un pie cuadrado de su sección transversal, bajo una gradiente hidráulica de 100 por ciento, a una temperatura de 60°F.....

La fórmula general para la permeabilidad puede ser escrita como sigue:

$$P = \frac{qlt}{Tah},$$

donde "P" es el coeficiente de permeabilidad, "q" la cantidad de agua, "l" la longitud de la columna de muestra, "t" la corrección para la temperatura, "T" el tiempo, "a" el área de la sección transversal de la muestra, y "h" la cabeza.

En publicaciones más recientes de Ground Water Division se ha hecho costumbre emplear la ecuación

$$Q = PIA, \quad (284)$$

donde "Q" es la descarga total, "P" el coeficiente de permeabilidad como se lo define arriba, "I" la gradiente hidráulica y "A" el área de la sección transversal. Se afirma que ésto es la Ley de Darcy.

Si ahora enfocamos nuestra atención sobre la ecuación (284), al convertir todos sus miembros excepto "P" en los símbolos utilizados aquí, la transformamos en

$$q = -P \cdot \frac{dh}{dl}. \quad (285)$$

Como se afirma que ésto es la Ley de Darcy, su comparación con la ecuación (74) nos conduciría a suponer que

$$P \equiv k\rho \cdot \frac{l}{\eta} \cdot g, \quad (286)$$

y varía como una función de las propiedades del medio, de las del fluido y con la intensidad de la gravedad;

En esta suposición, sin embargo, tendríamos que estar equivocados; pues si estudiamos nuevamente la definición de "P" citada arriba, descubrimos que se aplica sólo al flujo de agua a una temperatura de 60°F (y presumiblemente un valor constante de "g"), y a ningún otro fluido. Si queremos conocer el índice de flujo de otro fluido -digamos aceite- cuya densidad y viscosidad son diferentes de las del agua a 60°F., a través de un medio cuyo valor de "P" ya es conocido, no sólo no podemos usar la ecuación (284), sino que también nos quedamos sin ecuación.

La ecuación "Q = PIA" es por lo tanto una expresión incompleta de la Ley de Darcy. Para obtener una ecuación correspondiente completa (que comprenda a "P", en primer lugar traducimos a "P" en una expresión equivalente en términos de "k", " ρ ", " η " y "g". Hacemos esto notando que para agua a 60°F y un valor constante de la gravedad, " ρ ", " η " y "g" asumen los valores constantes " ρ_0 ", " η_0 " y " g_0 " respectivamente. En este caso la ecuación (284) asume la forma

$$q = -k \cdot \frac{\rho_0 g_0}{\eta_0} \cdot \frac{dh}{dl}, \quad (287)$$

la que, comparada con la ecuación equivalente (285), da

$$P \equiv \frac{k\rho_0 g_0}{\eta_0}. \quad (288)$$

Introduzcamos ahora " $k(\rho_0 g_0 / \eta_0)$ " en la ecuación (74) multiplicando el término a mano derecha de esa ecuación por la cantidad

$$\frac{\rho_0 \cdot \eta_0 \cdot g_0}{\rho_0 \cdot \eta_0 \cdot g_0} \quad (288a)$$

(que es igual a la unidad). El resultado obtenido es

$$\begin{aligned} q &= -\frac{\rho_0 \cdot \eta_0 \cdot g_0 \cdot k \rho g}{\rho_0 \cdot \eta_0 \cdot g_0 \cdot \eta} \cdot \frac{\partial h}{\partial l} = -\frac{\rho \cdot \eta_0 \cdot g}{\rho_0 \cdot \eta \cdot g_0} \cdot \frac{k \rho_0 g_0}{\eta_0} \cdot \frac{\partial h}{\partial l} \\ &= -\frac{\rho}{\rho_0} \cdot \frac{\eta_0}{\eta} \cdot \frac{g}{g_0} \cdot \rho \cdot \frac{\partial h}{\partial l}, \end{aligned} \quad (289)$$

que es válido para cualquier intensidad de gravedad y para el flujo de absolutamente cualquier fluido. En consecuencia, esto representa una expresión completa de la Ley de Darcy y tendría que ser la expresión empleada en todos los casos en que se quiera representar la Ley de Darcy. En un caso en que consideremos el flujo de agua a 60°F y con la intensidad normal de la gravedad, tendremos " ρ " = " ρ_0 ", " η " = " η_0 " y " g " = " g_0 " de modo que la ecuación (289) se reducirá, como un caso especial, a la expresión familiar " $Q = PIA$ ".

En la literatura de Ground Water Division no aparece una expresión completa de la Ley de Darcy que comprenda a " P ", y la omisión de no distinguir entre una expresión completa y una incompleta de la Ley ha sido responsable de la mayoría de la confusión relativa a la significancia del parámetro " P ". La ecuación " $P = QIA$ " es expresada acostumbradamente, sin calificación, como una forma de la Ley de Darcy.

Volviendo ahora a la ecuación (288), vemos que " k " es la única variable independiente. Por lo tanto, para todo valor de " k ", el de " P " es únicamente determinado. Entonces " P " es una función sólo del medio y es entonces un coeficiente de permeabilidad válido.

El hecho de que las dimensiones de "P" son (LT^{-1}) mientras las de "k" son (L^2) produce una contradicción aparente. Parece extraño que un coeficiente que depende sólo de la unidad de longitud deba comprender las unidades de longitud y de tiempo. Esta discrepancia es resultado del factor de proporcionalidad, el que, mientras es constante, tiene dimensión. Cuando estas dimensiones son tomadas en cuenta, obtenemos

$$[P] = \left[\frac{\rho_0 \xi_0}{\eta_0} \right] [k] = [LT^{-1}] \quad (290)$$

y la paradoja queda resuelta.

El otro coeficiente que queremos considerar es el propuesto originalmente por Nutting (19) en 1930 y más tarde adoptado por Wyckoff y asociados (20) en 1934. En cada caso se empleó una ecuación de la forma

$$q = -\frac{k}{\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial l} \quad (290a)$$

y "k" fue definido como el coeficiente de permeabilidad. A pesar del hecho de que esta ecuación es físicamente errónea como una expresión de la Ley de Darcy, debido al uso de la presión como una función potencial, el "k" así definido es idéntico al que usamos aquí.

Volvemos ahora a la cuestión de los valores numéricos de "k", para los sedimentos comunes. Estos pueden ser obtenidos directamente extrayendo a "k" de la ecuación (74) cuando todas las otras cantidades de esa ecuación hayan sido determinadas por medición. Careciendo de esta información podemos, por medio de la ecuación (288), encontrar el valor de "k" indirectamente para cualquier sedimento para el que sea conocido el valor de "P". Extrayendo "k" de la ecuación (288) dá

(290b)

Las mediciones de "P" que se encuentran disponibles están expresadas en galones por día por pie cuadrado - las unidades prescriptas por Meinzer. Para obtener el valor de "k" en centímetros cuadrados debemos primeramente convertir a "P" a unidades métricas; centímetros cúbicos por segundo por centímetro cuadrado. Entonces, cuando tengamos los valores de " η_0 ", " ρ_0 " y " g_0 " expresados en unidades c.g.s., el valor de "k" es obtenido directamente.

Para la conversión de "P" de unidades Meinzer a unidades métricas

$$1 \frac{\text{gal./día}}{\text{pie}^2} = 4,716 \times 10^{-5} \frac{\text{cm}^3/\text{seg}}{\text{cm}^2}$$

Podemos tomar como valores normales de " η_0 " y " ρ_0 " (la viscosidad y densidad del agua a 60° F.) a 0,01125 poise y 0,999 gr/cm³, respectivamente; y para un valor normal de la gravedad podemos usar 980 cm/seg². De estos valores obtenemos

$$\frac{\eta_0}{\rho_0 g_0} = \frac{0,01125}{0,999 \times 980} \text{ cm-seg.} = 1,149 \times 10^{-5} \text{ cm/seg.}$$

Entonces el valor de "k", expresado en centímetros cuadrados, es

$$\begin{aligned} k [\text{cm}^2] &= (1,149 \times 10^{-5} \times 4,716 \times 10^{-5}) P \left[\frac{\text{gal/day}}{\text{ft}^2} \right] \\ &= (5,419 \times 10^{-10}) P \left[\frac{\text{gal/day}}{\text{ft}^2} \right]. \end{aligned} \quad (290c)$$

También, como 1 pie² = 929,0 cm², el valor de "k" expresado en pies cuadrados es dado por

$$\begin{aligned}
 k [\text{ft}^2] &= \left(\frac{5419 \times 10^{-10}}{929.0} \right) P \left[\frac{\text{gal/day}}{\text{ft}^2} \right] \\
 &= (5.833 \times 10^{-13}) P \left[\frac{\text{gal/day}}{\text{ft}^2} \right]
 \end{aligned}
 \tag{290a}$$

A la inversa,

$$P \left[\frac{\text{gal/day}}{\text{ft}^2} \right] = (1.845 \times 10^9) k [\text{cm}^2] = (1.714 \times 10^{12}) k [\text{ft}^2].
 \tag{290c}$$

Debe enfatizarse que "P" y "k" son dos clases de cantidades enteramente diferentes y por lo tanto no pueden ser igualadas. No tiene sentido preguntar "Cuántas unidades de "k" son "iguales" a una unidad de "P"?" Las conversiones precedentes no representan por lo tanto una relación de igualdad, pero sí una de función. El vínculo común entre "P" y "k" es la permeabilidad del medio; para una permeabilidad dada tanto los valores de "P" como los de "k" son únicamente determinados. Consecuentemente, si el valor de uno u otro, expresado en cualquier juego de unidades arbitrario, es conocido, el valor del otro, expresado en cualquier otro juego arbitrario de unidades, puede ser determinado.

Los valores medidos de la permeabilidad de sedimentos, expresados en unidades Meinzer, varían desde el orden de 10^{-4} para limo arcilloso hasta 10^{+5} para ripio. El margen de permeabilidad correspondiente medido en centímetros cuadrados sería desde el orden de 10^{-14} hasta 10^{-5} , y medido en pies cuadrados desde 10^{-17} hasta 10^{-8} . Resulta obvio, por lo tanto, que una permeabilidad de 1 centímetro cuadrado o de 1 pie cuadrado es mucho mayor que las permeabilidades encontradas en la práctica.

Esto, sin embargo, no presenta ninguna dificultad seria. Se ha convertido en práctica casi universal expresar los resultados de mediciones

físicas en la forma de un producto de un pequeño número decimal con 10 elevado a una potencia integral, correspondiendo los valores positivos del exponente a números mayores que 1, y los negativos a los menores.

De esta manera es igualmente fácil tratar con números expresados como un producto de 10 elevado a una potencia grande o pequeña, o a un exponente positivo o negativo.

Si aún así se siente la necesidad de una unidad "práctica" más pequeña, hay dos formas de conseguir esa unidad. Una de éstas es cambiar las unidades fundamentales utilizadas; en lugar del centímetro, el gramo y el segundo, podrían utilizarse múltiplos y submúltiplos adecuados de los mismos. Esto, sin embargo, podría originar confusiones, y es mucho más simple retener las unidades fundamentales y definir la unidad "práctica" como

$$1 \text{ (unidad práctica)} = 10^n \text{ (cm}^2\text{)} = 1 \text{ (}10^n \text{ cm}^2\text{)}.$$

La elección de "n" es enteramente arbitraria y depende de las propiedades que se quieren que imparta a la unidad práctica. Por ejemplo, si se desea que la unidad práctica sea tal que todos los valores de permeabilidad medidos sean múltiplos de tal unidad, "n" tendría que tener el valor de aproximadamente -15. Si se quiere que la unidad sea tal que el número más grande de valores medidos varíe entre 1 y 1.000, entonces "n" tendría que ser aproximadamente -10.

29. LA "LEY" DE BADON GHIJBEN Y HERZBERG.

Ultimamente se ha dado mucho énfasis a la así llamada "ley" de Badon Ghijben (21) y Herzberg (22). Cada uno de estos autores, independientemente, hizo el descubrimiento de que en pozos cerca de la costa del mar el agua salada no era encontrada a nivel del mar, como esperaban, pero sí a una profundidad bajo el nivel del mar del orden de cuarenta veces la altura del agua dulce sobre el nivel del mar. Para este fenómeno cada uno de ellos dedujo la misma explicación, es decir, que

existía un equilibrio estático entre el agua dulce y el agua salada, de modo que la masa de una columna vertical unitaria de agua dulce que se extendiera desde la lámina acuífera hasta la superficie de contacto agua dulce-agua salada debía tener la misma masa que el agua salada desplazada -una columna extendida desde la lámina acuífera hasta el nivel del mar. Siguiendo este razonamiento, si hacemos que " z'_{12} " sea la elevación de la lámina acuífera sobre el nivel del mar, " z'_{23} " la de la superficie de contacto agua dulce-agua salada directamente abajo, " ρ_2 " la densidad del agua dulce y " ρ_3 " la del agua salada, tendríamos

$$\rho_2 (z'_{12} - z'_{23}) + \rho_3 z'_{23} = 0$$

de donde

$$z'_{23} = -\frac{\rho_2}{\rho_3 - \rho_2} \cdot z'_{12} \quad (291)$$

La ecuación (291) es equivalente a las deducidas por Badon Ghijben y Herzberg. Es una relación de gran utilidad pero su empleo también entraña considerable peligro de error, porque no es correcta.

La presunción de que esta ecuación es la deducida es que estamos tratando un caso de equilibrio hidrostático, y mientras esta presunción es válida la ecuación es estrictamente correcta. En problemas de aguas subterráneas, sin embargo, la presunción no es válida en absoluto, porque el agua dulce no está a potencial constante pero sí en estado de movimiento continuo. Si no se agregase agua adicional por precipitación, el flujo del agua dulce continuaría hasta que ésta se disipase totalmente, y quedaría solamente agua salada con una lámina acuífera a nivel del mar.

Estamos por lo tanto tratando con un equilibrio dinámico entre el agua dulce fluyente y el agua salada estática, cuyo comportamiento ya ha sido tratado en las ecuaciones (205)-(217). Se notará que las ecuaciones (291) y (215) son idénticas excepto que en (215) " z'_{12} " es la

elevación en el aire de una superficie equipotencial particular de agua dulce, y " z_{23} " la elevación en el agua salada de la misma superficie, mientras en la ecuación (291) " z'_{12} " es la elevación de la lámina acuífera y " z'_{23} " la elevación de la superficie de contacto agua dulce-agua salada en la misma línea vertical.

Para condiciones estáticas la ecuación (215) es idéntica en todo respecto a (291). Para gradientes potenciales bajas en el agua dulce la diferencia entre las dos ecuaciones es negligible; pero para gradientes grandes, tales como las que ocurren cerca de un pozo de bombeo, un canal, o la costa del mar, la relación estática de la ecuación (291) no puede ser ni aproximadamente correcta, y su empleo no es garantizado bajo tales condiciones. En realidad, se podrán evitar mejor los errores usando siempre las ecuaciones dinámicas, de las que una situación estática es sólo un caso especial.

30. APLICACION A PROBLEMAS DE INTERES CORRIENTE.

Antes de cerrar, será instructivo examinar unos pocos problemas ilustrativos de aguas subterráneas, de interés corriente, a la luz de la presente teoría. Los problemas más útiles para este propósito son los que han servido de base para desacuerdos o para opiniones contrarias a las presentes deducciones. Como la presente teoría está basada sobre el principio de la conservación de la materia y las leyes de la termodinámica, a las que debe conformarse el movimiento de aguas subterráneas, debe esperarse que un movimiento de aguas subterráneas postulado en disconformidad con las presentes deducciones pueda ser demostrado como violatorio de uno u otro de estos principios -equivaliendo la violación de cualquiera de las leyes de la termodinámica a un mecanismo de movimiento perpetuo.

31. FLUJO CERCA DEL NIVEL FREÁTICO.

Uno de tales problemas es la naturaleza del flujo cerca de la lámina acuífera. Aparentemente, debido a la semejanza entre la topografía de la superficie de la lámina acuífera y la superficie del terreno, se suponía comúnmente, y la idea todavía prevalece en cierta extensión, que el flujo de agua subterránea está concentrado cerca de la superficie de la lámina acuífera y que el flujo que bajo la pendiente de la lámina acuífera se asemeja al flujo correspondiente bajando una pendiente topográfica. Se suponía que la intensidad del flujo disminuye rápidamente con la profundidad, alcanzando substancialmente a cero en una región de permeabilidad más o menos uniforme a profundidades bajo el nivel de las partes más bajas de la lámina acuífera. Esto condujo a la concepción de un gran cuerpo de agua subterránea estancada bajo la zona superficial de flujo.

Este punto de vista ha sido defendido recientemente por Swinnerton (23). Tomando una región de relieve topográfico suave en un clima húmedo, con rocas de permeabilidad uniforme, Swinnerton discute que desde un punto "A" (fig. 43) (mostrado como un elemento de volumen debajo de la lámina acuífera) el agua fluirá, por todos los trayectos posibles, hacia una salida (mostrada como un valle oceano). El flujo será distribuido entre esos diversos trayectos de acuerdo a la resistencia friccional, siguiendo el mayor caudal de flujo el trayecto de menor resistencia, y sucesivamente caudales menores los trayectos de resistencia creciente. El trayecto de menos resistencia es el más corto, y la resistencia aumenta con el incremento de la longitud del trayecto. Entre los trayectos 1, 2 y 3 de longitud crecientemente mayor, el flujo será más grande a lo largo del trayecto rectilíneo 1 y sucesivamente menor a lo largo de los trayectos 2 y 3.

Aparte de cualquier cuestión de resistencia friccional, esto implica directamente una violación del principio de conservación de la materia. Si el flujo se produce desde "A" por todos los trayectos posibles, de

los que 1, 2 y 3 son ejemplos, entonces "A" será un volumen desde el cual el agua fluye en todas direcciones y por lo tanto una región en la cual el agua debe ser creada.

Si este mecanismo de flujo postulado fuese cierto de un punto arbitrario "A", entonces también tendría que serlo de un punto cercano "A'", y las familias de líneas de flujo irradiadas desde estos dos puntos tendrían que formar sistemas interseccionantes a través de todo el campo cercano. Como dos líneas de flujo pueden unirse sólo en una fuente o desagüe absolutos (punto donde el agua es creada o aniquilada) que no existen en movimiento de aguas subterráneas, este tipo de flujo implicaría la violación del principio de conservación de la materia en todos los puntos del campo.

Nuevamente, no se puede asignar ningún monto de resistencia friccional a ningún tubo de corriente porque la resistencia es una función de la geometría del tubo y del "índice de flujo del fluido". Sabemos, por ejemplo, que la cantidad de energía expendida por unidad de masa por fuerzas friccionales es precisamente igual a la caída del potencial. Por lo tanto, a lo largo de todas las trayectorias, de cualquier forma y longitud, la cantidad de trabajo requerida para impulsar una unidad de masa del fluido desde una superficie equipotencial a otra es precisamente la misma, a pesar de que los trayectos recorridos por líneas de flujo diferentes puedan diferir ampliamente en longitud.

Podemos llegar a lo que realmente ocurre en un caso de esta clase solamente dando la consideración debida a la distribución de las fuentes y desagües sobre los límites del campo de flujo, y de los potenciales correspondientes. Aquí, como se explicó antes, una fuente significa un área a cuyo través el agua penetra en el campo; y un desagüe, un área de salida.

En este problema las fuentes están distribuidas sobre la superficie de contacto agua-aire, y son formadas por agua que se filtra hacia abajo.

Los desagües están limitados a los fondos de los valles que contengan corrientes. En el campo de flujo las trayectorias y tubos de corriente se originan sobre fuentes y terminan sobre desagües. El flujo es solenoidal y la velocidad finita, de modo que cada tubo de corriente de descarga finita tiene una sección transversal finita, y ningún par de líneas de flujo pueden intersectarse entre sí. En un tiempo dado una línea de flujo y sólo una puede pasar a través de un punto dado. Todas éstas son deducciones del principio de conservación de la materia.

Ahora tratemos las relaciones de la energía. Los potenciales en las fuentes y desagües son dados en todos los puntos por " ϕ " = " gz ", donde " z " es la elevación de la lámina acuífera o de la superficie del agua en una corriente. En el aire, las superficies " ϕ " = constante coinciden con superficies " z " = constante; subterráneamente se refractan y son en todo lugar normales a las trayectorias. En los desagües la sección transversal de una corriente es sensiblemente una región equipotencial, de modo que subterráneamente las superficies equipotenciales alrededor de un desagüe deben formar un sistema de superficies más o menos concéntricas con un sistema radiante de líneas de flujo en el plano vertical normal al eje del valle.

Como cada tubo de corriente tiene su fuente en la superficie de contacto aire-agua, es necesario que intersecte esta superficie a algún ángulo mayor que cero, pues de otra forma, su descarga sería cero. Podemos formarnos alguna idea del ángulo de pendiente del tubo de corriente en la superficie de contacto aire-agua si tenemos en cuenta que sobre esta superficie existe una filtración vertical hacia abajo a una descarga específica " q_1 " bajo la gradiente de " $-g$ ". El hecho de que el fluido en esta región es discontinuo muestra que la descarga es menor que la demandada por la Ley de Darcy. Por tanto

$$q_1 < -\sigma g$$

y la componente normal a la superficie de contacto es dada por

$$q_{n1} < -\sigma g \cos \alpha, \quad (293)$$

donde " α " es la pendiente hacia arriba de la superficie de contacto aire-agua.

Las condiciones usuales del límite deben prevalecer a lo largo de la superficie de contacto. La componente normal del flujo y la componente tangencial de la gradiente potencial deben ser las mismas. Entonces,

$$q_{n1} = q_{n2} < -\sigma g \cos \alpha, \quad (294)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right)_1 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right)_2 = g \sin \alpha. \quad (295)$$

Consecuentemente la componente tangencial del flujo en el lado del agua de la superficie de contacto aire-agua es

$$q_{s2} = -\sigma g \sin \alpha. \quad (296)$$

Las ecuaciones (294) y (296) dan las componentes tangencial y normal del flujo en la superficie de contacto aire-agua. La suma vectorial de éstas es " q_2 ". La componente normal " q_{n2} " puede variar entre los límites cero y " $-\sigma g \cos \alpha$ ", y " α " entre los límites de cero y 90° . Al aproximarse " q_{n2} " a cero, " q_2 " se aproxima a " q_{s2} " como un límite, y las líneas de flujo se vuelven tangenciales a la superficie de contacto. Al aproximarse " q_{n2} " a su límite superior " $-\sigma g \cos \alpha$ ", " q_2 " se aproxima al límite " $-\sigma g$ ", con las líneas de flujo verticales. Para un valor constante de " q_{n2} " $\neq 0$, al tender " α " a cero " q_{s2} " tiende a cero, y " q_2 " tiende a " q_{n2} ", que nuevamente es vertical.

Por lo tanto en el problema de Swinnerton las líneas de flujo en sus

puntos de origen sobre la superficie de contacto aire-agua siempre se inclinan más pronunciadamente que la superficie de contacto misma, volviéndose verticales en la división terreno-agua, donde "Q" es cero y, a través de la división, inclinándose en la dirección opuesta. De acuerdo con ésto, los tubos de corriente descienden verticalmente en la división; y alejándose de la división, hacia los valles en cualquier lado, los ángulos de inclinación de las líneas de flujo gradualmente se aproximan al ángulo de inclinación de la superficie de contacto. Los tubos de corriente adyacentes a las salidas siguen trayectos casi rectilíneos, mientras cada tubo originado sucesivamente más lejos hace un lazo hacia abajo fuera de los trayectos de todos los tubos de corriente entre él y la salida, hasta que finalmente el tubo de corriente en la división desciende a una profundidad que en material uniformemente permeable no tiene límite asignable.

En una región tal no puede existir ningún cuerpo de agua estancada a menos que sea un cuerpo de agua tal como el agua salada, que es físicamente diferente de la que está fluyendo. La región de flujo más intenso no es una zona paralela a la superficie de contacto aire-agua ~~pero~~ sino una región donde las líneas de flujo convergen hacia un desagüe.

32. LA HIPOTESIS DE JOHNSON SOBRE EL ORIGEN DE LOS CAÑONES SUBMARINOS.

Para un problema que involucre más directamente relaciones de energía pasamos ahora a la hipótesis adelantada por Johnson (24) sobre el origen de los cañones submarinos fuera de la costa Este de Norte América. Todo lo que nos interesa aquí es que esta hipótesis involucra un mecanismo de agua subterránea mostrado en la Figura 46, tomado de Johnson y descrito por él (pag. 80) como sigue:

"Se puede suponer, por ejemplo, que agua artesianas con una cabeza "H" (Figura 2) escapa en parte (flechas punteadas) a través de lechos permeables adyacentes y a través de fisuras y otras aberturas para for-

mar un manantial submarino poco profundo en "S'". Cuando la erosión reduce la superficie del terreno, o el asentamiento la hace descender, o se produce una elevación del nivel del mar, la cabeza menor "h" puede ser insuficiente para causar flujo hacia afuera (efluente). Bajo las nuevas condiciones, el agua salada fluyendo hacia adentro a través de la fisura, que ahora sirve como una entrada "I", se mezclará con el agua dulce en el acuífero y las aguas mezcladas encontrarán salida en "S'". Debería tenerse en cuenta que mientras el agua dulce que descende a lo largo de una fisura o a través de lechos permeables no se mezclará libremente con el agua salada debajo, sino que más bien "flotará" sobre dicha agua, el agua salada penetrando hacia abajo en la misma manera tiende, por su mayor gravedad específica, a entrar en el agua dulce debajo y esparcirse en ella, aumentando el peso de la mezcla".

Sin otro análisis más profundo, la primera cosa que impresiona de este mecanismo es que, si el agua salada debe penetrar hacia abajo y mezclarse con el agua dulce, y entonces esta mezcla, que es todavía menos densa que el agua salada, debe continuar su descenso hasta una salida en "S'", entonces también deberíamos esperar que el aire frío más denso en la punta de una chimenea penetre hacia abajo y se mezcle con el aire más caliente de la chimenea, y que la mezcla continúe hacia abajo y encuentre una salida a través del hogar.

Ahora para considerar el problema analíticamente, hagamos que " ρ_1 ", " ρ_2 " y " ρ_3 " sean las densidades del agua dulce, de la mezcla y del agua salada, respectivamente, y que " ϕ_1 ", " ϕ_2 " y " ϕ_3 " sean los potenciales correspondientes. Estos potenciales en todos los puntos serán:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Phi}_1 &= gz + \frac{p - p_0}{\rho_1}, \\ \bar{\Phi}_2 &= gz + \frac{p - p_c}{\rho_2}, \\ \bar{\Phi}_3 &= gz + \frac{p - p_0}{\rho_3}, \end{aligned} \right\} \quad (297)$$

y en los puntos de contacto con el agua salada,

$$p = -\rho_3 gz + p_0, \quad (298)$$

lo que nos dá como los valores de los potenciales en esos puntos:

$$\left. \begin{aligned} (\bar{\Phi}_1)_3 &= -\frac{\rho_3 - \rho_1}{\rho_1} \cdot gz, \\ (\bar{\Phi}_2)_3 &= -\frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_2} \cdot gz, \\ (\bar{\Phi}_3)_3 &= \frac{\rho_3 - \rho_3}{\rho_3} \cdot gz = 0. \end{aligned} \right\} \quad (299)$$

De ésto resulta claro que tanto " $(\bar{\Phi}_1)_3$ " como " $(\bar{\Phi}_2)_3$ " aumentan con la profundidad bajo el nivel del mar.

Ahora hagamos que " P_1 " sea el punto sobre el acuífero principal donde se separan los dos canales, " P_2 " un punto de la zona de mezcla y " P_3 " la salida inferior ("S" de Johnson). Por la hipótesis de Johnson

(300)

de modo que el agua dulce no es capaz por sí misma de fluír hacia afuera en "P₃". En "P₂" sin embargo, se produce mezcla, y la mezcla entonces fluye desde "P₂" hacia la salida en "P₃".

Para determinar si ésto es o no posible, sólo tenemos que observar que el punto "P₂", donde se produce la mezcla, debe estar en algún lugar más alto que "P₃". En estos dos puntos los potenciales de la mezcla son

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{22} &= -\frac{P_3 - P_2}{\rho_2} \cdot g z_2, \\ \Phi_{23} &= -\frac{P_3 - P_2}{\rho_2} \cdot g z_3, \end{aligned} \right\} \quad (301)$$

cuya diferencia es

$$\Phi_{23} - \Phi_{22} = -\frac{P_3 - P_2}{\rho_2} \cdot g(z_3 - z_2) > 0. \quad (302)$$

De aquí que el flujo de "P₂" a "P₃" es desde un potencial menor hacia uno mayor.

Estamos obligados a concluir, por lo tanto, que el mecanismo de flujo postulado por Johnson, si se lo pudiese hacer funcionar, violaría el principio de la conservación de la energía o la primera ley de la termodinámica, y por lo tanto constituye un mecanismo de movimiento perpetuo de la primera clase. En principio no es diferente del agua fluyendo lentamente hacia arriba en un canal abierto.

Lo que en realidad ocurriría en la situación mostrada por Johnson en

su Figura 2 sería ésto: La superficie de contacto agua dulce - agua salada se produciría a una elevación

$$z_{13} = -\frac{\rho_1}{\rho_3 - \rho_1} \cdot h, \quad (302a)$$

obtenida de la ecuación (212), donde "h" es la altura manométrica del agua dulce sobre el nivel del mar en el punto de contacto. Esta "h" es igual o menor que la altura de la lámina acuífera usada por Johnson, dependiendo de si el agua está en movimiento o estática. Si

$$z_{13} > z_1,$$

la superficie de contacto estará más alta que P_1 , y no se producirá ningún flujo. Si

$$z_3 < z_{13} < z_1,$$

el agua dulce fluirá hacia afuera en "S" y existirá una superficie de contacto estática entre " P_1 " y " P_3 ". Si

$$z_{13} < z_3,$$

el agua dulce fluirá hacia afuera tanto en "S" como en "S'".

33. EL CANAL NAVEGABLE DE FLORIDA.

Un problema algo más complejo es presentado por el canal navegable de Florida propuesto, cuyos datos esenciales resumidos han sido presentados por Paige (25) del United States Army Corps of Engineers. El canal propuesto no debe ser revestido y estará al nivel del mar, y una parte de la ruta elegida se extiende a través del área de afloramiento de la caliza Ocala. Esta es una caliza altamente permeable y es el acuífero principal de Florida. Aflora sobre un área que es una elipse aproximada de norte a sur, de 150 millas de largo por 50 millas de

ancho, y forma la región central de una bóveda estructural enorme. Al alejarse de ésta la Ocala se inclina y subyace las formaciones más jóvenes del resto del estado.

Aproximadamente 50 millas al norte de la ruta del canal y 78 millas al sur se presentan dos grandes altos en la superficie piezométrica basada sobre la caliza Ocala; la situada al norte alcanza más de 90 pies y la del sur aproximadamente 135 pies sobre el nivel del mar. En la región del afloramiento la superficie piezométrica se une en la lámina acuífera subterránea. Los altos piezométricos coinciden con altos topográficos y son sólo ligeramente más bajos que la superficie de la lámina acuífera. En el área del afloramiento la ruta del canal se extiende a través de la silla (saddle) de la lámina acuífera subterránea entre estos dos altos. En esta región la elevación de la lámina acuífera es de unos 40 pies sobre el nivel del mar.

El principal problema de agua subterránea involucrado, y el único que consideraremos aquí, es: Qué efecto tendrá el canal sobre la lámina acuífera subterránea en su vecindad donde atraviesa el afloramiento de la caliza Ocala, y que ancho tendrá a ambos lados del canal el cinturón en que el efecto será perceptible en los pozos? Paige concluyó que resultaría una nueva lámina acuífera subterránea con una superficie más pendiente cerca del canal y aproximándose asintóticamente con la distancia a la lámina acuífera original. La distancia desde el canal hasta donde esta nueva lámina acuífera coincidiría con la anterior fue estimada por Page entre 10 y 15 millas.

En esta conclusión ha sido severamente criticado por Brown (26) y por Thompson, Meinzer y Stringfield (27), a quienes Paige (28) respondió después.

Como este es un problema sobre el que parece existir considerable acuerdo con respecto a los principales datos del terreno, los desacuerdos evidentemente se producen de una diferencia en la teoría em-

placada para hacer las predicciones. Será por lo tanto instructivo examinarla a la luz de la teoría aquí desarrollada.

El único problema que consideraremos es el del nuevo perfil de la lámina acuífera donde el canal atraviesa la caliza Ocala, y la distancia máxima a la que será apreciable la bajada de la lámina acuífera. Con la información disponible es posible sólo una solución aproximada, pero debería obtenerse una del orden de magnitud correcto.

Para nuestra aproximación idealizaremos algo el problema considerando un caso en el que la topografía y la lámina acuífera son los mismos que los de Florida pero donde las rocas son todas de caliza Ocala y de conductividad específica " σ " uniforme. Hagamos que " h' " sea la elevación original de la lámina acuífera y " h " la de la nueva lámina acuífera después de excavado el canal. El valor de " h' " sobre la ruta del canal en la "Línea" es de unos 40 pies y en el alto del sur, 78 millas al sur del sur, poco más de 135 pies, dando una pendiente promedio de la lámina acuífera de aproximadamente 1,2 pies por milla.

Como ésta es la pendiente más pequeña y la lámina acuífera más alta que se pueden encontrar, el efecto del canal en términos de la cantidad que será bajada la lámina acuífera y del ancho de la zona afectada deberían ser aquí un máximo. Como estamos interesados principalmente en este valor máximo, no necesitamos considerar otros casos.

El canal, después de ser excavado, actuará como un desagüe prismático horizontal que contendrá agua a potencial constante con una superficie libre solo ligeramente por encima del nivel del mar. Las líneas de flujo del agua dulce convergiran hacia este prisma perpendicularmente a la superficie. Serán por lo tanto paralelas a un plano normal al eje del prisma y se aproximarán al canal más o menos radialmente en este plano.

La superficie de contacto aire-agua dulce tendrá una pendiente hacia el canal y se aproximará a la orilla sur tangencialmente (presumible-

mente a unos 30°). Habrá una superficie de filtración entre ésta y el nivel del agua en el canal, de un ancho finito pero desconocido. La superficie de contacto agua dulce-agua salada tendrá una pendiente hacia arriba hacia el canal; y, como el flujo será casi bilateralmente simétrico en lados opuestos del canal, el agua salada formará una cuña aguda, con su cresta paralela al eje del canal, y alcanzará una profundidad hasta pocas decenas de pies del fondo.

La magnitud de las pendientes de las superficies de contacto superior e inferior decrecerá rápidamente con la distancia al alejarse del canal; y a alguna distancia desconocida, que procuraremos estimar, la nueva lámina acuífera se aproximará a una coincidencia con la que existía antes.

Para determinar analíticamente las propiedades de este nuevo perfil, elegimos el origen de co-ordenadas a nivel del mar en el eje del canal y hacemos que el eje "x" se extienda hacia el sur normal al canal, y el eje "z" hacia arriba. Tomamos como nuestra región de flujo a una sección laminar paralela al plano "x-z" y de espesor unitario. A cierta distancia, " x_1 ", que procuraremos determinar, el perfil de la nueva lámina acuífera vendrá a coincidir con el viejo. Presumimos que entre esta distancia y el canal no existen fuentes ni desagües, de modo que en todo este intervalo la descarga total "Q" es constante. Hacemos que "h" sea la elevación de la nueva lámina acuífera y "A" el área de la sección transversal de un tubo de corriente de espesor unitario normal a las líneas de flujo a cualquier distancia "x". Igualando la descarga en "x" y en " x_1 " resulta

$$Q = qA = -\sigma g \cdot \frac{dh}{dx} \cdot A = -\sigma g \left(\frac{dh}{dx} \right)_1 A_1. \quad (303)$$

Eliminando " $-\sigma g$ " y extrayendo " dh/dx " resulta

$$\frac{dh}{dx} = \left(\frac{dh}{dx}\right)_I A_1 \cdot \frac{I}{A} \quad (304)$$

Haciendo " $(dh/dx)_I A_1 = "a"$ e integrando

$$h = h_0 + a \int \frac{I}{A} \cdot dx. \quad (305)$$

Para poder efectuar esta integración y determinar "h" debemos encontrar como varía con la distancia a lo largo del perfil el área "A". En la vecindad inmediata del canal ésto no es fácil de hacer a pesar de que sabemos que el valor menor de "A" es igual a una mitad del perímetro mojado del canal. Pero para la parte del perfil donde la pendiente del agua subterránea no es mayor que 100 pies por milla, podemos suponer, como una aproximación, que el área "A" es igual a la diferencia de las elevaciones en el aire y en agua salada de la superficie equipotencial de agua fresca que se produce a una distancia "x". Esto es obtenido de la ecuación (213.) y

$$A \cong (z_{12} - z_{23}) = \frac{\rho_3}{\rho_3 - \rho_2} \cdot h = bh, \quad (306)$$

donde " $b = \rho_3 / (\rho_3 - \rho_2)$ ".

Hagamos que " x_0 " sea la distancia a la cual esta aproximación se vuelve admisible, y que " h_0 " sea la altura de la lámina acuífera a esa distancia. Entonces, si introducimos el valor de "A" de la ecuación (306) en la ecuación (304), la elevación del perfil entre " x_0 " y " x_1 " es obtenible por integración. La ecuación diferencial del perfil es

$$\frac{dh}{dx} = \frac{a}{b} \cdot \frac{I}{h}, \quad (306a)$$

y separando las variables e integrando

$$\int_{h_0}^h h \cdot dh = \frac{a}{b} \int_{x_0}^x dx = \frac{h^2 - h_0^2}{2} = \frac{a}{b} (x - x_0), \quad (306b)$$

de donde

$$h^2 = \frac{2a}{b} (x - x_0) + h_0^2 \quad (307)$$

Como todos los factores de esta ecuación excepto " h^2 " y " x " son constantes, ésta representa una línea recta con la pendiente " $2a/b$ " pasando a través del punto " (x_0, h_0^2) " cuando se la representa gráficamente usando los valores de " h^2 " como ordenadas y " x " como abscisas.

Si sobre el mismo gráfico dibujamos los valores de " h^2 " del perfil de la lámina acuífera anterior, la línea representada por la ecuación (307) debe ser una tangente a ésta, siendo " x_1 " la abscisa del punto de tangencia. A través de cualquier punto dado " (x_0, k_0^2) " sólo puede dibujarse una línea tangente al perfil anterior, y por medio de éste " x_1 " y " a " son únicamente determinados. El valor de " b " es dado por las densidades del agua fresca y del agua salada y es aproximadamente 40.

Podemos solamente aproximarnos a " x_0 " y a " h_0 ". Como el área " A " decrece continuamente al irnos aproximando al canal, la pendiente de la lámina acuífera, tal como es dada por la ecuación (304), debe aumentar continuamente, es decir, en el canal la pendiente tendrá su valor máximo (unos 30°) y decrecerá continuamente con la distancia. De aquí que la pendiente promedio desde el canal a cualquier distancia " x " es siempre mayor que la pendiente en " x ". También, a cualquier distancia " x ".

$$0 < h < h' ;$$

y a " x_0 "

$$0 < h_0 < h_0'$$

Elegimos a " x_0 " como la distancia a la cual la pendiente de la lámina acuífera será de 100 pies por milla. Entre " $x = 0$ " y " $x = x_0$ " la pendiente promedio debe ser mayor que 100 pies por milla. Al mismo tiempo " h_0 " debe ser menor que la elevación de la lámina acuífera anterior, o menos que 40 pies. Por lo tanto " x_0 " debe estar a menos de $\frac{1}{2}$ milla de la orilla sur del canal.

Para ser conservativos, tomemos a " x_0 " como 1 milla. A esta distancia " h_0 " será mayor que cero por una cantidad desconocida, posiblemente por 10 ó 20 pies; pero nuevamente, para poder ser conservativos, fijémosla igual a cero. Entonces el perfil cuadrado de la nueva lámina acuífera es la línea recta que pasa a través del punto (1, 0) y tangente al perfil " h_1^2 " de la lámina acuífera anterior.

Estas operaciones han sido efectuadas y sus resultados dibujados gráficamente en la Figura 47. Se produce coincidencia entre estos perfiles a unas 23 millas al sur del canal, a una elevación de aproximadamente 60 pies. A 20 millas la bajada de la lámina acuífera es negligible; a 15 millas la bajada es 2 pies (de 52 a 50 pies); a 10 millas, 5 pies (de 45 a 40 pies); y a 5 millas, 15,5 pies (de 42 a 26,5 pies).

Este es el momento para examinar nuestras presunciones. Supusimos que la caliza Ocala era de permeabilidad uniforme y espesor ilimitado. Localmente, por supuesto, debido a pasos de agua por disolución de la roca u otras inhomogeneidades, la permeabilidad no es uniforme; sin embargo la suavidad de los contornos hidrológicos en la Ocala muestra que regionalmente tiene una permeabilidad efectiva no influenciada por tales irregularidades locales. Es la permeabilidad regional efectiva la que hemos empleado aquí, y hemos arreglado nuestras ecuaciones de tal forma que se cancele y nos ahorre la necesidad de conocer su valor.

Con la presunción de que la caliza Ocala es de espesor ilimitado, el área "A" aumenta continuamente con la distancia desde el canal por la bajada de la superficie de contacto del agua salada. A 23 millas ésto

representa una profundidad de unos 2.400 pies. Si la Ocala tiene un espesor menor y está subyugada por rocas impermeables, entonces " x_1 " casi coincidirá con la distancia a la cual la superficie de contacto del agua salada alcanza la superficie inferior de la caliza, y el ancho de la zona afectada será entonces menor que el calculado aquí.

Supusimos que no existían fuentes ni desagües desde el canal hasta la distancia " x_1 " y que " Q " era constante a lo largo de esta longitud. Esta presunción es falsa, pero nuevamente el error está hacia el lado conservativo. Debido a la precipitación, existirán fuentes distribuidas a lo largo de todo el perfil. También existirán desagües donde el agua se descarga localmente en manantiales y arroyos. Estos, sin embargo, disminuirán al aproximarnos al canal y bajar la lámina acuífera, de modo que, en total, la diferencia entre fuentes y desagües, o las fuentes netas, aumentarán hacia el canal, haciendo que el perfil de la lámina acuífera esté en todos los puntos más alto que lo que hemos computado. Esto correspondientemente reducirá el monto de la bajada en cada distancia. También, la curva de " h^2 " dibujada como una función de " x " no será más una recta y tendrá un arco convexo hacia arriba. El punto de tangencia con el perfil anterior estará por lo tanto más cerca del canal que lo que hemos computado.

Supusimos que a una distancia de 1 milla desde el eje del canal la elevación del perfil de la nueva lámina acuífera sería cero. Como, al borde sur del canal, el perfil tiene una elevación inicial igual a la del borde superior de la zona de filtración, y una pendiente inicial igual a la de la orilla sur (30° o más), y como la pendiente continúa siendo positiva, decreciendo a un índice desconocido con la distancia, entonces su elevación a una milla desde el eje del canal debe ser mayor que cero por una cantidad desconocida -posiblemente 10 ó 20 pies. Resulta claro, por lo tanto, que la presunción de que a esta distancia la elevación del perfil es cero está errada, y tal vez ampliamente. Otra vez, sin embargo, el error está hacia el lado conservativo, y todos

los puntos sobre el perfil real deben ser más altos que los dados en base a esta presunción, y la distancia verdadera de coincidencia aproximada debe estar correspondientemente más cerca.

Nuestras presunciones por lo tanto han sido todas hechas hacia el lado conservativo, de modo que las elevaciones del perfil mostradas en la Figura 47 son más bajas y la distancia " x_1 " es mayor que lo que sería el caso para el perfil real. Los valores presentes son, por lo tanto, extremos, y tendientes a establecer un límite para los efectos que deben esperarse.

Una bajada de menos de 5 pies a 10 millas y de 2 pies a 15 millas es de importancia negligible en sus efectos sobre pozos locales y suministro de agua, porque a estas distancias la profundidad hasta el agua salada todavía sería 1.600 - 2.000 pies bajo el nivel del mar.

De aquí que la estimación efectuada por Paige y sus colegas en el sentido de que la zona de bajada apreciable de la lámina acuífera no se extendería más allá de las 10 ó 15 millas desde el canal es enteramente confirmada por el presente análisis y parece ser una estimación conservativa. Las dudas sembradas por los críticos de Paige, uno de los cuales (Brown) predijo que resultarían pendientes de la lámina acuífera de 1 - 2 pies por milla con una lámina acuífera solo ligeramente por sobre el nivel del mar en una zona de 20 a 40 millas de ancho, aparecen, en lo que a este problema concierne, como enteramente infundadas.

34. CONCLUSION.

Mientras la teoría analítica del movimiento de aguas subterráneas ha progresado notablemente durante los últimos cincuenta años hacia convertirse en una rama de la ciencia física exacta, hemos encontrado que el progreso ha sido impedido continuamente por ciertas concepciones erróneas fundamentales persistentes relativas a la función potencial que gobierna el movimiento de aguas subterráneas. Hemos intentado aquí re-

examinar los fundamentos de esta materia desde sus principios básicos, y establecerla sobre una base más de conformidad con los principios físicos que gobiernan el movimiento de materias terrestres -el principio de la conservación de la materia y las leyes de la termodinámica- que lo que ha sido el caso con tratamientos anteriores.

En el presente estudio el esfuerzo ha estado dirigido primariamente a deducir relaciones fundamentales de interés e importancia cuando se tratan problemas de hidrología de aguas subterráneas. Al hacerlo, se ha aprovechado la estrecha analogía entre muchos aspectos teóricos del agua subterránea y las teorías de la electricidad, de modo que las relaciones aquí establecidas están, dentro de lo posible, expresadas en una forma ya familiar a los estudiantes de electricidad. Por esto la Ley de Darcy, tal como se la expone aquí, es estrictamente análoga a la Ley de Ohm en electricidad. El potencial de los fluidos es análogo al potencial eléctrico; el vector "q" del flujo es análogo al vector "i" de la corriente eléctrica; la conductividad específica de los fluidos es análoga a la conductividad eléctrica específica; y la ley tangencial de refracción es común al flujo eléctrico y al de fluidos. Por medio de estas analogías los tratados sobre electricidad se convierten en algunos de nuestros textos más autorizados en auxiliares para el estudio del movimiento de agua subterránea y son recomendados como tales a los estudiantes de esta materia. Por el contrario, los problemas multi-fluidales no tienen contraparte en electricidad, y así han merecido atención especial aquí.

Se ha hecho todo el esfuerzo posible para satisfacer un doble objetivo en el desarrollo de la presente teoría: expresar los resultados obtenidos en forma tal que puedan ser fácilmente empleados para obtener soluciones rápidas, gráficas y aproximadas de problemas de aguas subterráneas; y al mismo tiempo formular las ecuaciones básicas de manera tal que puedan ser fácilmente adaptables a los tratamientos analíticos más precisos de campos vectoriales y escalares bi- y tri-dimensionales.

Para la mayoría de los problemas de aguas subterráneas son posibles soluciones gráficas rápidas que darán resultados de la exactitud deseada. Estas involucran el dibujo de los campos de flujo en una o más secciones transversales verticales principales, de conformidad con la geometría y permeabilidad del medio, y las condiciones conocidas de los límites.

Con este propósito, la observancia rígida de un pequeño número de reglas fundamentales impedirá que se produzcan serias equivocaciones. Estas son algunas de las restricciones más importantes que deben observarse:

1. En puntos donde la velocidad no es cero, al mismo tiempo y en el mismo punto sólo pasa una línea de flujo.
2. El flujo de aguas subterráneas es solenoidal, y la descarga es constante a lo largo de cualquier tubo de corriente.
3. Un tubo de corriente no puede convergir a cero y solamente puede terminar sobre límites permeables de un campo de flujo o, de lo contrario, dentro del campo al aproximarse la velocidad a cero mientras el área de la sección transversal del tubo se vuelve ilimitadamente grande.
4. La componente normal del vector de flujo "q" es la misma a ambos lados de todas las superficies.
5. El vector de flujo "q" en todos los puntos de un medio permeable isotrópico es dado, en dirección y magnitud, por

$$"q = -\sigma \text{grad. } \Phi"$$

Las líneas de flujo son en todo lugar normales a las superficies equipotenciales, y la intensidad del flujo aumenta al disminuir la distancia entre superficies equipotenciales equidiferentes.

6. No pueden intersectarse dos superficies equipotenciales de potenciales diferentes.

7. Ninguna superficie equipotencial puede cerrarse completamente sobre sí misma.
8. Ninguna superficie equipotencial puede terminar en otro lugar que no sea sobre el límite del campo de flujo.
9. Las componentes tangenciales de la gradiente potencial son iguales sobre lados opuestos de cualquier superficie permeable.
10. Cuando el agua subterránea fluye a través de una superficie de contacto plana entre rocas de permeabilidades diferentes, las líneas de flujo y superficies equipotenciales se refractan por la ley tangencial.
11. Un cuerpo de agua estático o en movimiento lento que ocupe un espacio o estanque, está a potencial constante.
12. Las líneas de flujo terminan perpendicularmente sobre las superficies permeables de todas las regiones equipotenciales.
13. Las superficies equipotenciales terminan perpendicularmente sobre todos los límites impermeables de un campo de flujo.
14. Cuando se superponen dos campos de flujo, el vector de flujo resultante en cada punto es la suma vectorial de los vectores de los campos componentes, y el campo potencial resultante es la suma algebraica de los potenciales componentes.
15. Cuando coexiste agua dulce con cuerpos de aire estático y agua salada estática, si el agua dulce está estática las superficies de contacto son horizontales, y la secuencia de los fluidos en dirección ascendente está en el orden decreciente de densidad.
16. Si el agua dulce fluye, las superficies de contacto se inclinarán hacia la capa de agua dulce de forma tal que reducirán el área de su sección transversal en la dirección del flujo.
17. Superficies equipotenciales equidiferentes de agua dulce se refrac-

tan en las superficies de contacto con cuerpos estáticos de aire y de agua salada en superficies horizontales igualmente espaciadas, con el espaciamiento en agua salada igual a " $\rho_2/(\rho_3 - \rho_2)$ " veces el espaciamiento en el aire, donde " ρ_3 " y " ρ_2 " son las densidades respectivas del agua salada y del agua dulce.

RECONOCIMIENTOS.-

El presente estudio es, en muchos sentidos, una actividad co-operativa y el autor está profundamente agradecido a todos los que en una u otra manera han contribuido a él en un período de años. El mayor reconocimiento, sin embargo, es para los que lo han asistido directamente en su producción. Entre éstos debe mencionarse particularmente a: Carl Eckart, del "Department of Physics of the University of Chicago", quien hizo una crítica útil de un tratado previo de potenciales de dos fluidos y quien después leyó el manuscrito terminado y sugirió una revisión importante; C. H. Dix, físico matemático de la Socony Oil Company, quien leyó críticamente el primer cuarto del manuscrito; Bernard D. Holbrook, físico matemático de Bell Telephone Laboratories, quien esmeradamente editó el desarrollo teórico entero contenido en este estudio; Fritz A. Weitzel, arquitecto, quien hizo los dibujos para las figuras; Sidney Paige, del "United States Army Corps of Engineers", quien amablemente suministró informaciones relativas al canal navegable de Florida; Oscar E. Meinzer y C. E. Jacob de la "Ground Water Division of the United States Geological Survey", quienes suministraron informaciones útiles sobre el coeficiente de permeabilidad utilizado por la "Ground Water Division"; y ayudantes editoriales y estenográficos voluntarios, que modestamente insisten en permanecer anónimos.-

NOTAS

- 1 Henry Darcy, "Les Fontaines publiques de la ville de Dijon" (Paris: Victor Dalment, 1856).
- 2 C.S.Slichter, "Theoretical Investigation of the Motion of Ground Water", "19th. Ann. Rept. U.S. Geol. Surv.," Part II (1897-98), pp295--384.
- 3 Robert Dachler, "Grundwasserströmung" (Vienna: J.Springer, 1936).
- 4 Morris Muskat, "Flow of Homogenous Fluids through Porous Media" (New York: McGraw-Hill, 1937).
- 5 "Op.cit.," pp. 570 ff.
- 6 "An Experimental Investigation of the Circumstances Which Determine Whether the Motion of Water Shall Be Direct or Sinuous and of the Law of Resistance in Parallel Channels," "Phil.Trans.Royal Soc. London" Vol. 174 (1883), pp. 935-82; also "Papers on Mechanical and Physical Subjects" (Cambridge: University Press, 1901), Vol.II, pp. 51-105.
- 7 Erik Lindquist, "On the Flow of Water through Porous Soil", "1er. Congres des grands barrages" (Stockholm, 1933), pp. 81-101.
- 8 V.C.Fisher, "Further Tests of Permeability with Low Hydraulic Gradients", "Trans.Amer.Geophys. Union, 16th. Ann. Meeting" (1935), pp. 499-503.
- 9 This result has been derived earlier, using a different method from that given here, by Wyckoff, Botset, Muskat, and Reed ("Measurement of Permeability of Porous Media", "Bull.Amer.Assoc.Petrol.Geol.," Vol. XVIII (1934), pp. 161-90).
- 10 G. Thiem, "Hydrologische Methoden" (Leipzig, 1906).
- 11 Roland K. Wenzel, "The Thiem Method for Determining Permeability of Water-bearing Materials", "J.S.G.S.Water-Supply Paper 697A" (1936)

- 12 Both Dachler and Muskat have discussed this problem for the air-fresh-water interface and have reached conclusions in conformity with those here.
- 12a Because of the variation in size of the pore spaces, however, the fluid interface will form a ragged surface ranging in vertical extent from near zero to tens of centimeters, depending upon the coarseness or fineness of the granular material.
- 13 P.W.Bridgman, "The Effect of Pressure on the Viscosity of Forty-three Pure Liquids", "Proc.Amer.Acad.Arts and Sci.", Vol. LXI (1926), pp. 57-99.
- 14 Charles V. Theis, "The Relation between the Lowering of the Piezometric Surface and the Rate and Duration of Discharge of a Well Using Ground Water Storage", "Trans.Amer.Geoph.Union", 1935, pp. 519-24.
- 15 Willard Gardner, T.R. Collier, and Doris Farr, "Fundamental Principles Governing the Control of Ground Water", "Trans.Amer.Geoph.Union" 1934, pp.563-66.
- 16 V. T. Stringfield, "The Piezometric Surface of Artesian Water in the Florida Peninsula", "Trans.Amer.Geoph.Union", 1935, pp.524-29.
- 17 Sidney Paige, "Effect of Sea-Level Canal in the Ground-Water Level of Florida - A Reply", "Econ.Geol", Vol.XXXIII (1938), pp. 647-65.
- 18 Norah Dowell Stearns, "Laboratory Tests on Physical Properties of Water-bearing Materials"; "U.S.Geol.Surv.Water-Supply Paper 596-F" (1928), pp. 121-77.
- 19 P.G. Nutting, "Physical Analysis of Oil Sands", "Bull.Amer.Assoc. Petrol Geol.", Vol. XIV (1930), pp. 1337-49.
- 20 R.D. Wyckoff, H.G.Botset, M.Muskat, and D.W.Reed, "Measurement of Permeability of Porous Media", "Bull.Amer.Assoc.Petrol.Geol.", Vol. XVIII (1934), pp. 161-90.

- 21 W.Badon Ghijben, "Nota in Verband met de Voorgenomen Put boring Nabij Amsterdam", Tijdschrift van het Koninkhijk, Institut van Ingenieurs, 1888-89, p.21.
- 22 Baurat Herzberg, "Die Wasserversorgung einiger Nordseebader", "Journal für Basbeleuchtung und Wasserversorgung", Vol. XLIV (1901), pp. 815-19 and 842-44.
- 23 A.C.Swinnerton, "Origin of Limestone Caverns", "Geol.Soc.Amer.Bull. 43" (1932), pp.663-92.
- 24 Douglas Johnson, "The Origin of Submarine Canyons" (New York-Columbia University Press, 1939).
- 25 Sidney Paige, "Effect of a Sea-Level Canal on the Ground-Water of Florida", "Econ.Geol.", Vol. XXXI (1936), pp.537-70.
- 26 John S. Brown, "The Florida Ship Canal", "Econ.Geol.", Vol. XXXII (1937), pp. 589-99.
- 27 D.G. Thompson, E.O. Meinzer, and V.T. Stringfield, "Effect of a Sea-Level Canal on the Ground-Water Level of Florida", "Econ.Geol.", Vol XXXIII (1938), pp. 87-107.
- 28 Sidney Paige, "Effect of Sea-Level Canal on the Ground-Water Level of Florida - A Reply", "Econ.Geol.", Vol.XXXIII (1938), pp. 647-65.

TRADUCCION DE NOTAS.

- 9 Este resultado ha sido deducido antes, empleando un método diferente del aquí dado, por Wyckoff, Botset, Muskat y Reed ("Medición de la Permeabilidad de Medios Porosos").
- 12 Tanto Dachler como Muskat han discutido este problema para la superficie de contacto aire-agua dulce y han arribado a conclusiones de conformidad con éstas.
- 12a Debido a la variación en el tamaño de los espacios de los poros, sin embargo, la superficie de contacto de los fluidos formará una superficie áspera que variará en extensión vertical desde cerca de cero a decenas de centímetros, dependiendo del grosor o fineza del material granular.

DISCUSION: LA TEORIA DEL MOVIMIENTO DE AGUAS SUBTERRANEAS

H. KRUTTER

Pennsylvania State College

He observado con interés el artículo de M. King Hubbert sobre "La Teoría del Movimiento de Aguas Subterráneas" publicado como Parte 1 del número Noviembre-Diciembre 1940 del "Journal of Geology". Me parece que el tema principal de este artículo está relacionado con la generalización adecuada de la Ley de Darcy. También se desprende de este tratado la impresión de que dicha generalización no ha sido nunca antes establecida adecuadamente y, por lo tanto, que nunca se la empleó correctamente. El último autor sobre este tema, M. Muskat, en su libro "The Flow of Homogenous Fluids through Porous Media" (El flujo de fluidos homogéneos a través de medios porosos) es también presentado como habiendo generalizado incorrectamente la Ley de Darcy. He tenido el placer de utilizar dos veces el libro de Muskat como texto, y me gustaría, por lo tanto, señalar la corrección del tratamiento que contiene, ya que se podría deducir de las críticas de Hubbert que todo está mal en el libro de Muskat por la diferencia de si un potencial de velocidad puede o no ser definido para un sistema con constantes variables.

La generalización correcta de la Ley de Darcy para un medio, aplicable a todos los casos de interés práctico, está dada en la ecuación (2), sección 3.3, página 129, del libro de Muskat.

Hubbert generaliza las ecuaciones de Muskat para tomar en cuenta la densidad variable. Sin embargo, no se hace ninguna aplicación de esta generalización. Muskat seguidamente introduce un potencial en la ecuación (3). Este es aparentemente el punto en que Hubbert está en desacuerdo con Muskat. Pienso que tendría que resultar obvio al lector que este paso pudo ser tomado sólo si la permeabilidad y la viscosidad eran

constantes. Yo sé que cuando presenté esto en mis clases, hice la observación precedente. Hasta que leí el tratado de Hubbert no se me ocurrió que podría hacerse alguna otra interpretación. De igual forma la ecuación (1), sección 3.4, página 131, es cierta solamente si la permeabilidad y la viscosidad son constantes, y esto concuerda con mis observaciones que anteceden. El error por omisión cometido por Muskat como queda expuesto arriba no tiene ninguna significancia real, como puede observarse en el tratamiento subsiguiente a través del libro. Muskat ha usado consistentemente la expresión correcta de la Ley de Darcy para todas sus aplicaciones.

Por ejemplo, en la página 145, en la última frase del párrafo, se establece explícitamente que las ecuaciones precedentes, en las que se emplea a " ", se refieren únicamente al caso en que el medio es isotrópico y homogéneo. Otra vez, en la página 277, sección 5.5., un problema no isotrópico es tratado correctamente. Después en la página 685, en la discusión de sistemas de flujo de gases en medios de permeabilidad variable, la ecuación (1) muestra explícitamente que "k" tendría que estar a la izquierda de las gradientes de presión (gravedad despreciable en este problema). La evidencia más directa de que Muskat no cometió ningún error básico en el empleo de la Ley de Darcy o en su formulación está en la sección 7.2, páginas 401-3. Aquí nuevamente en el tratamiento de medios con permeabilidades variables, "k" es ubicado a la izquierda de las gradientes de presión. Como prueba final, en un artículo por Muskat y Meres (25) la formulación del problema mezcla de gas-líquido muestra que, donde "k" es variable por cualquier razón, las velocidades son dadas por " $k\mu$ " y no por " $\Delta(k\mu)$ " (la gravedad nuevamente despreciable y la viscosidad tomada como constante).

Toda la cuestión sobre si la Ley de Darcy puede o no ser expresada en términos de un potencial de velocidad es puramente académica mientras se tengan las ecuaciones básicas en términos de gradientes de presión y cabeza de gravedad con el factor de permeabilidad colocado

fuera del signo de gradiente. El uso de un potencial de velocidad depende enteramente de la conveniencia de simplificar la notación. En el libro de Muskat no hay ninguna sugestión de que existe una única función potencial para un medio de permeabilidad no uniforme. Por el contrario, en el capítulo vii se muestra explícitamente que donde el medio está compuesto por regiones de permeabilidad diferente, cada región de permeabilidad distinta pero uniforme debería tener soluciones separadas para la presión o para la función potencial, y que las diversas soluciones deberían entonces ser reunidas con las condiciones del límite en las superficies de contacto. Más aún, cuando la permeabilidad del medio varía continuamente, el problema es resuelto en el libro en términos de la función de la presión con la permeabilidad como un factor a la izquierda de las gradientes en una forma estrictamente correcta. La introducción de un potencial de velocidad para incluir todo excepto la permeabilidad representaría solamente una cuestión de conveniencia en la notación y no cambiaría en ninguna forma la significación de las ecuaciones básicas tal como se las utilizó en realidad. En vista de los múltiples ejemplos tratados correctamente en el libro de Muskat, de todas las diversas situaciones posibles de interés práctico, es difícil comprender como pudo surgir una mala interpretación y tener la impresión de que existe algún error básico en el trabajo. Entre los muchos problemas específicamente tratados en el libro de Muskat, Hubbert no ha señalado ni uno en el que la solución final sea errónea. Ciertamente si las fórmulas fundamentales eran incorrectas, las deducciones analíticas basadas en tal formulación errónea serían de igual modo equivocadas.

(1) "Physics", Muskat and Meres; Vol. VII (1936), p.346.

LA TEORIA DEL MOVIMIENTO DE AGUAS SUBTERRANEASUNA RESPUESTA

M. King Hubbert

En los párrafos introductorios del tratado que su crítico discute, el presente autor hizo referencia a los estudios analíticos anteriores sobre este tema, entre los que se citó al tratado sobresaliente, "The Flow of Homogenous Fluids through Porous Media", de Morris Muskat. La siguiente observación fue hecha con respecto a estos trabajos anteriores:

"Mientras la importancia de éstos y otros trabajos similares no puede ser sobrestimada, todos ellos han fallado en uno o más puntos con respecto al objetivo de establecer una teoría sobre el movimiento de aguas subterráneas que esté libre de contradicciones internas y a la vez de conformidad con todos los principios fundamentales de la física que el movimiento de aguas subterráneas debe satisfacer." (1)

Más adelante, después de desarrollar una generalización de la Ley de Darcy desde los primeros principios, se mostró que, de las diversas expresiones para tal ley desarrolladas por Muskat, una era errónea y otra válida solamente en un caso especial importante. (2)

Como no se hicieron otras referencias de naturaleza crítica al trabajo de Muskat, las precedentes deben ser las afirmaciones sobre las que el crítico del autor basa su discusión. Para resolver los puntos que cuestiona examinemos los antecedentes. Con este propósito las secciones del libro de Muskat que contienen la secuencia lógica, y son por lo tanto las pertinentes, son los capítulos ii, iii, y vii.

En el capítulo ii, titulado "Darcy's Law and the Measurement of Permeability" (La Ley de Darcy y la medición de la permeabilidad),

Muskat comienza por expresar la Ley de Darcy correctamente en la forma (3)

$$Q = \frac{cA\Delta h}{L}.$$

Inmediatamente después, sin embargo, deja de lado el factor de gradiente hidráulica h/L , y subsecuentemente se confina a expresiones relativas a la gradiente de presión, dp/ds , solamente, llegando finalmente al resultado (4)

$$w = \frac{k}{\mu} \frac{dp}{ds},$$

como una formulación de la Ley de Darcy. En el mismo capítulo algunas figuras que describen aparatos de permeabilidad son mostradas con flujo en dirección vertical -un arreglo verificado por el texto. En algunas de éstas los fluidos usados eran líquidos.

Como estas condiciones experimentales prohíben la desestimación de la gravedad y de la densidad del fluido, es ineludible la conclusión de que la expresión desarrollada en este capítulo para la Ley de Darcy es físicamente errónea (5) - una conclusión que no puede ser invalidada por la inserción de cláusulas de escape en el sentido de que la gravedad está siendo despreciada. La Ley de Darcy es una descripción de experimentos efectuados sobre la tierra, y no es permisible dejar de lado la gravedad en tales circunstancias. Sin embargo la ecuación precedente se ha convertido en una de las expresiones más usadas de la Ley de Darcy en la literatura corriente.

En el capítulo iii, titulado "General Hydrodynamical Equations for the Flow of Fluids through Porous Media," (Ecuaciones hidrodinámicas generales para el flujo de fluidos a través de medios porosos), se hace un nuevo intento de generalización en el que la gravedad es tomada en cuenta. Esta aproximación es culminada por la introducción del potencial de velocidad (6)

$$\Phi = \frac{k}{\mu} (p - V),$$

Donde "k" es la permeabilidad, " μ " la viscosidad del fluido, "p" la presión, y "V" el potencial de gravedad. De esto se obtiene la expresión para la Ley de Darcy (7)

$$\bar{v} = -\nabla\Phi,$$

sobre la que Muskat hace la siguiente afirmación: "Las ecuaciones (3) y (5) pueden ser consideradas como la "Ley de Darcy generalizada", y pueden ser tomadas como la base dinámica para todos los problemas de flujo viscoso a través de medios porosos para todos los tipos de fluidos homogéneos". (8)

Esta era la ecuación que el presente autor mostró que era válida únicamente para el flujo de fluido de densidad y viscosidad constantes a través de un medio isotrópico, y de ahí no una expresión general de la Ley de Darcy. (9) Esto, como señala mi crítico, fue admitido más adelante en su libro por Muskat, mismo (10).

Hacia el final del capítulo iii, la analogía entre la conducción de calor y electricidad, electrostáticos, etc., y el flujo de fluidos a través de medios porosos, es puesta de relieve, y en la Tabla 13 se tabulan cantidades análogas. Aquí otra vez, para fluidos, la presión "p" es tomada como análoga al potencial en electricidad, a pesar de que la analogía es invalidada automáticamente por la afirmación posterior de que la gravedad está siendo despreciada, dejándonos sin ninguna analogía.

Como la "Ley de Darcy generalizada" del capítulo iii no es válida para medios no homogéneos, el problema del flujo a través de una superficie de contacto entre dos medios de permeabilidades diferentes asume una significancia particular. Cómo puede resolverse este problema? En el capítulo vii Muskat lo trata como sigue:

"Se presumen soluciones de la ecuación de Laplace¹ separadamente para cada región, y entonces éstas son ajustadas a los límites que separan las regiones -las "superficies de discontinuidad"- de modo que el

que el juego combinado de soluciones corresponda al sistema combinado de fluidos. Este "ajuste" puede ser formulado más precisamente por las dos condiciones siguientes que deben ser satisfechas en toda superficie de discontinuidad que separe dos regiones (1) y (2):

$$p(1) = p(2) \quad (1)$$

$$k_1 \frac{\partial p(1)}{\partial n} = k_2 \frac{\partial p(2)}{\partial n} \quad (2)$$

en todos los puntos del límite, cuya normal es indicada por n ," (11).

En una nota al pie muestra además que las ecuaciones (1) y (2) producen una ley tangencial de refracción. De estas dos ecuaciones, (1) es correcta. La ecuación (2), sin embargo, es una reversión de la forma gradiente de presión de la Ley de Darcy del capítulo ii, que ya se ha mostrado es incorrecta. En lo que se refiere a la ley tangencial de refracción, es simplemente la consecuencia matemática de cualquier par de ecuaciones de la forma de (1) y (2). En realidad, si reemplazamos la presión por temperatura en esas ecuaciones, todavía obtenemos una ley tangencial de refracción.

Estos ejemplos tendrían que ser suficientes para validar la afirmación original del autor de que los esfuerzos de Muskat por formular una generalización correcta de la Ley de Darcy no estaban libres de contradicciones internas ni de conformidad a veces con los principios fundamentales de la física que dicha ley debe satisfacer.

Sobre la cuestión de si los cálculos de problemas específicos por Muskat son o no correctos, el autor puede decir solamente que esto ha estado fuera del objetivo de la presente investigación pero que nunca supuso, y ciertamente no lo afirmó, que dichos resultados fueran otra cosa que correctos. Suponiendo que sean correctos, entonces, con respecto a la cuestión siguiente de cómo pudieron obtenerse respuestas correctas para problemas particulares si se habían cometido errores en la teoría fundamental, la contestación resulta bastante obvia -no uti-

lizando los errores cometidos!

Un examen somero, incluyendo los pasajes citados por el crítico del autor, parece indicar que así ha ocurrido. Para problemas en los que su "Ley de Darcy generalizada" no era aplicable, Muskat estuvo obligado a retroceder a ecuaciones físicas más primitivas, pero más generales y libres de excepciones, (12)

$$v_x = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$v_y = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$v_z = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{k}{\mu} \delta g,$$

que son, esencialmente, las desarrolladas y usadas originalmente por C. S. Slichter. (13) Estas son verdaderamente una forma generalizada de la Ley de Darcy y son obtenibles de las ecuaciones desarrolladas por el presente autor por diferenciación con respecto a las tres coordenadas. Aún más, ellas contradicen los esfuerzos reconocidos de Muskat para generalizar, precisamente en la manera aquí indicada.-

- (1) Jour. Geol., vol. XLVIII, pt. I, 1940, p. 786.
- (2) Ibid, pp. 903-9
- (3) Ecuación (1), p. 56.
- (4) Ecuación (3), p. 71.
- (5) Hubbert, op.cit., pp. 792-94.
- (6) Ecuación (3), p. 128.
- (7) Ecuación (5), p. 128.
- (8) Op.cit., p. 129.
- (9) Op.cit., pp. 903-9.
- (10) Op.cit., p. 145.
- (11) Ibid., pp. 400-01.

- (12) Ecuación (1), p. 402.
- (13) "Theoretical Investigation of the motion of ground water",
19th. Ann. Rept., U.S.Geol.Surv., Pt.II, (1897-98), 1899,
pp.295-384.

Reproducido del Journal of Geology, 1941, vol. XLIX, pp: 324-330.

El tratado original de Hubbert ha sido reimpresso como una publicación
separada por la University of Chicago Press, 57th.Ellis St., Chicago 37,
Ill., U.S.A.

TRADUCCION DE LOS TEXTOS CORRESPONDIENTES A LAS ILUSTRACIONES

- Fig 1 - Aparato para el estudio del flujo de un líquido a través de un material permeable.
- Fig 2 - Transformación indireccional e irreversible de un sistema mecánico aislado.-
- Fig 3 - Bomba para la transformación de un líquido de estado normal al estado final.-
- Fig 4 - Diagramas indicadores de bombas - "a" para gases "B" para líquidos.
- Fig 5 - Potencial del fluido en cualquier punto dentro de un cuerpo de líquido estático.-
- Fig 6 - Las fuerzas que actúan sobre un elemento microscópico de fluido clasificadas "a" como fuerza de superficie, fuerza de cuerpo y fuerza inercial, y "B" como fuerza impulsora, fuerza resistiva y fuerza inercial.-
- Fig 7 - Modo de dependencia sobre las gradientes de velocidad del fluido, de las tensiones transversales y fuerzas friccionales no balanceadas que actúan sobre un elemento fluido microscópico.-
- Fig 8 - "a" fuerza que actúa sobre un elemento de volumen microscópico en dirección paralela al flujo; "b" relación entre las fuerzas paralelas al flujo y las fuerzas totales debidas a la gradiente de presión y gravedad.
- Fig 9 - Representación esquemática de la distorsión de trayectorias y equilibrios de fuerza por aumento de la velocidad del fluido. "a" "b" y "c" representan trayectorias y fuerzas correspondientes en acción sobre un elemento de volumen " dV " fijo, a velocidades sucesivamente mayores. La ley de Darcy tiene validez solamente para el caso "a".-
- Fig 10 - Variación espacial del campo continuo de la cantidad escalar.-
- Fig 11 - Relación entre campo escalar y campo vectorial derivado.
- Fig 12 - Propiedades vectoriales de la descarga específica de volumen "q"

- Fig 13 - Descarga de masa a través de las caras de un elemento de volumen microscópico.-
- Fig 14 - Descarga neta sobre las superficies de un tubo de corriente.
- Fig 15 - "a", Relaciones vectoriales entre las gradientes de los campos escalares de potencial de gravedad, presión y potencial del fluido.- "b", condición para equilibrio estático.-
- Fig 16 - Relación entre campos escalares sobreimpuestos de " p ", " u " y " ϕ " y sus gradientes negativas correspondientes.
- Fig 17 - "a", Potencial de fluido como una integral de línea en un campo de fuerza; "b" y "c", las correspondientes integrales de línea en los campos escalares de " p " y " u ".-
- Fig 18 - Representación vectorial de la ley de Darcy; "a" para medios isotrópicos; "b" para medios anisótropos.
- Fig 19 - La refracción de líneas de flujo en la superficie de contacto entre medios de diferentes permeabilidades.-
El valor de " k_2/k_1 " es aquí tomado como 5. La refracción obedece una ley tangencial.-
- Fig 20 - Refracción a través de capas de arena gruesa y fina con una relación de permeabilidad de 10.-
- Fig 21 - "a" flujo desde una región de permeabilidad finita; hacia "b" línea de flujo y superficies equipotenciales a lo largo de límites impermeables.-
- Fig 22 - Tubo de corriente elemental en flujo desde línea-fuente o fuente cilíndrica.-
- Fig 23 - Tubo de corriente elemental en flujo desde punto-fuente o fuente esférica.-

Fig 24 - Método gráfico para la combinación de los campos de flujo planos
Los campos componentes son flujo radial hacia una línea-desagüe
y flujo rectilíneo en el mismo plano. Las líneas de flujo están
espaciadas de modo que entre cada par se produzca la misma des-
carga.

"El método no es aplicable a campos que no sean planos."

Fig 25 - Adición gráfica a campos potenciales.-

" ϕ_3 " es la suma de " ϕ_1 " y " ϕ_2 ".

Fig 26 - Fuerzas en acción sobre elementos de fluidos de densidades dife-
rentes ubicados en el mismo punto.-

Fig 27 - Inclinación de superficie de contacto fluída debida al flujo
de ambos fluídos.-

Fig 28 - Inclinación de superficie de contacto y superficies equipoten-
ciales de ambos fluídos cuando un fluído fluye mientras el otro
está estático. Afortunadamente en la práctica los problemas más
importantes.-

Fig 29 - Diagrama para la identificación de las cantidades empleadas en
el tratamiento de la intersección de la superficie de contacto
de los fluídos con el límite entre regiones de diferentes per-
meabilidades.-

Fig 30 - Representación gráfica de las cantidades de las ecuaciones
(222) y (224),-

Fig 31 - Los ángulos a los que se refiere la ecuación (229).-

Fig 32 - Forma de aumento del índice de flujo del fluído 1 desde una re-
gión de permeabilidad finita hacia una de permeabilidad infinita
ocupada por fluído 2, al decrecer " θ_a ".-

Fig 33 - Forma aproximada del flujo de agua dulce en un espacio abierto
que contiene cuerpos de aire y agua dulce.-

- Fig 34 - Forma aproximada del flujo de agua dulce en un espacio abierto que contiene aire y agua salada. Nótese la orientación de las líneas de flujo y las dos superficies de contacto al aproximarse al límite del espacio abierto.-
- Fig 35 - Tensiones superficiales entre los fluidos y un sólido plano. ;
- Fig 36 - Elementos de superficie macroscópico de superficie de contacto en arena entre dos fluidos que tienen tensiones superficiales. "a"; Fuerzas que actúan sobre la longitud "ds" de la línea de contacto; "b" detalle de las mismas.-
- Fig 37 - Niveles de equilibrio de la superficie de contacto entre dos líquidos estáticos de diferentes densidades en un espacio abierto y en arena.-
- Fig 38.- La integral lineal por cuyo intermedio se define un potencial de velocidad " " .-
- Fig 39 - La integral lineal de velocidad desde "A" hasta "B" por dos caminos diferentes que atraviesan arenas de permeabilidades distintas
- Fig 40 - Integral lineal alrededor de un trayecto cerrado que atraviesa regiones de permeabilidades diferentes.-
- Fig 41 - Sección que muestra un acuífero inclinado y una superficie piezométrica.-
- Fig 42 - Discrepancia entre la profundidad real hasta el agua salada y la profundidad calculada según la "Ley" de Badon Ghijben y Herzberg para flujo cerca de una salida.-
- Fig 43 - Flujo desde la región "A" hacia una salida de acuerdo a Swinerton
- Fig 44 - Vectores del flujo en la superficie de contacto aire - agua cuando se produce infiltración de agua hacia abajo.-

Fig 45 - Muestra aproximada del flujo en material uniformemente permeable entre las fuentes distribuidas sobre las superficies de contacto aire-aire-agua y los desagües de los valles.

Fig 46 - Figura N° 2 de Johnson.-

Fig 47 - Comparación del perfil original del agua subterránea al sur del canal navegable de Florida con el valor limitante del nuevo como se lo ha calculado aquí.-

Fig 48 - Diagrama esquemático que muestra aproximadamente el tipo de relación entre los cuerpos de aire, agua salada y agua dulce que debe esperarse cerca de un canal a nivel del mar, en material uniformemente permeable. Las escalas están muy distorsionadas. Las profundidades debieran ser cuatro veces las mostradas aquí.

BIBLIOGRAFIA

- 1 Henry Darcy, *Les Fontaines publiques de la ville de Dijon* (Paris: Victor Dalmont, 1856).
- 2 C. S. Slichter, "Theoretical Investigation of the Motion of Ground Water", 19 Ann. Rept. U.S. Geol. Surv., Part II (1897-98) pp. 295-384.
- 3 Robert Dachler, *Grundwasserströmung* (Vienna: J. Springer, 1936).
- 4 Morris Muskat, *Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media* (New York: McGraw-Hill, 1937).
- 5 *Op. cit.*, pp. 570 ff.
- 6 "An Experimental Investigation of the Circumstances Which Determine Whether the Motion of Water Shall Be Direct or Sinuous and of the Law of Resistance in Parallel Channels," *Phil. Trans. Royal Soc. London*, Vol. 174 (1883), pp. 935-82; also *Papers on Mechanical and Physical Subjects* (Cambridge: University Press, 1901), Vol. II, pp 51-105.
- 7 Eril Lindquist, "On the Flow of Water through Porous Media", *1er. Congrès des grands barrages* (Stockholm, 1933), pp. 81-101.
- 8 V. C. Fishel, "Further Tests of Permeability with Low Hydraulic Gradients", *Trans. Amer. Geophys. Union*, 16th. Ann. Meeting (1935), pp. 499-503.
- 9 This result has been derived earlier, using a different method from that given here, by Wyckoff, Botset, Muskat, and Reed "Measurements of Permeability of Porous Media", *Bull. Amer. Assoc. Petrol. Geol.*, Vol XVIII (1934), pp. 161-90.
- 10 G. Thiem, *Hydrologische Methoden* (Leipzig, 1906).
- 11 Leland K. Wenzel, "The Thiem Method for Determining Permeability of Water-bearing Materials", *U.S.G.S. Water Supply Paper* 697 A (1936).
- 12 Both Dachler and Muskat have discussed this problem for the air-fresh-water interface and have reached conclusions in conformity with those here.

- 12a Because of the variations in size of the pore spaces, however, the fluid interface will form a ragged surface ranging in vertical extent from near zero to tens of centimeters, depending upon the coarseness or fineness of the granular material.
- 13 P. W. Bridgman, "The Effect of Pressure on the Viscosity of Forty-three Pure Liquids", Proc. Amer. Acad. Arts and Sci., Vol. LXI (1926), pp. 57-99.
- 14 Charles V. Theis, "The Relation between the Lowering of the Piezometric Surface and the Rate and Duration of Discharge of a Well Using Ground Water Storage", Trans. Amer. Geoph. Union, 1935, pp. 519-24.
- 15 Willard Gardner, T. R. Collier, and Doris Farr, "Fundamental Principles Governing the Control of Ground-Water," Trans. Amer. Geoph. Union, 1934, pp. 563-66.
- 16 V. T. Stringfield, "The Piezometric Surface of Artesian Water in the Florida Peninsula," Trans. Amer. Geoph. Union, 1935, pp. 524-29.
- 17 Sidney Paige, "Effect of Sea-Level Canal in the Ground-Water Level of Florida- A Reply", Econ. Geol., Vol. XXXIII (1938), pp. 647-65.
- 18 Norah Dowell Stearns, "Laboratory Tests on Physical Properties of Water-bearing Materials," U. S. Geol. Surv. Water-Supply Paper 596-F (1928), pp. 121-77.
- 19 P. G. Nutting, "Physical Analysis of Oil Sands", Bull. Amer. Assoc. Petrol. Geol., Vol. XIV (1930), pp. 1337-49.
- 20 R. D. Wyckoff, H. G. Botset, M. Muskat, and D. W. Reed, "Measurements of Permeability of Porous Media", Bull. Amer. Assoc. Petrol. Geol., Vol. XVIII (1934), pp. 161-90.
- 21 W. Badon Ghijben, "Nota in Verband met de Voorgenomen Put boring Nabij Amsterdam," Tijdschrift van het Koninkrijk, Instituut van Ingenieurs, 1888-89, p. 21.
- 22 Baurat Herzberg, "Die Wasserversorgung einiger Nordseebäder", Journal für Gasbeleuchtung und Wasserversorgung, Vol. XLIV (1901), pp. 815-19 and 842-44.

- 23 A. C. Swinnerton, "Origin of Limestone Caverns", Geol. Soc. Amer. Bull. 43 (1932), pp. 663-92.
- 24 Douglas Johnson, "The Origin of Submarine Canyons (New York: Columbia University Press, 1939).
- 25 Sidney Paige, "Effect of a Sea-Level Canal on the Ground-Water of Florida, Econ. Geol., Vol XXXI (1936), pp. 537-70.
- 26 John S. Brown, "The Florida Ship Canal", Econ. Geol., Vol XXXII (1937) pp. 589-99.
- 27 D. G. Thompson, E. O. Meinzer, and V. T. Stringfield, "Effect of a Sea-Level Canal on the Ground-Water Level of Florida", Econ. Geol., Vol. XXXIII (1938), pp. 87-107.
- 28 Sidney Paige, "Effect of Sea-Level Canal on the Ground-Water Level of Florida- A Reply," Econ. Geol., Vol. XXXIII (1938), pp. 647-65.

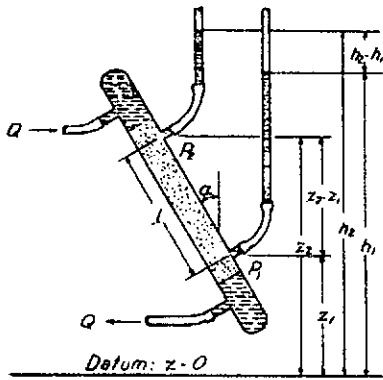


Fig. 1.- Apparatus for studying the flow of liquid through a permeable material.

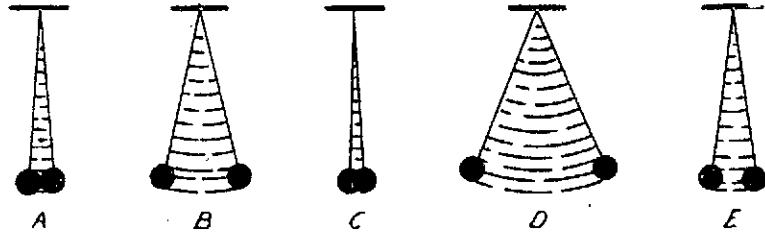


Fig. 2.- Unidirectional and irreversible transformation of isolated mechanical system.



Fig. 3.- Pump for transforming liquid from standard to final state.

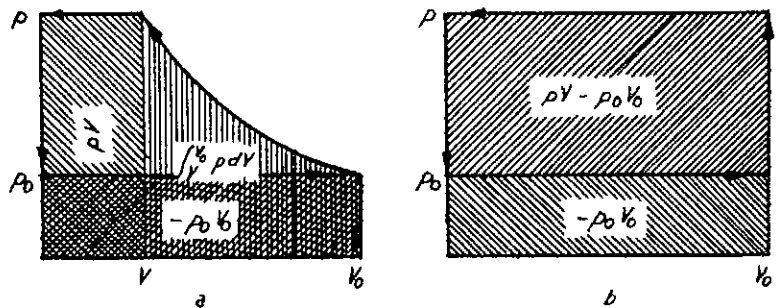


Fig. 4.- Pump indicator diagrams: a, for gases; b, for liquids.

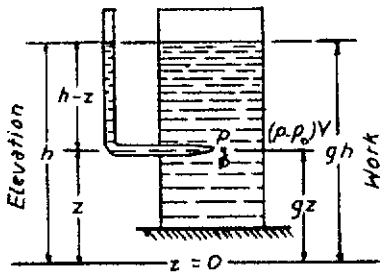


Fig. 5.- Fluid potential at any point inside a body of static liquid.

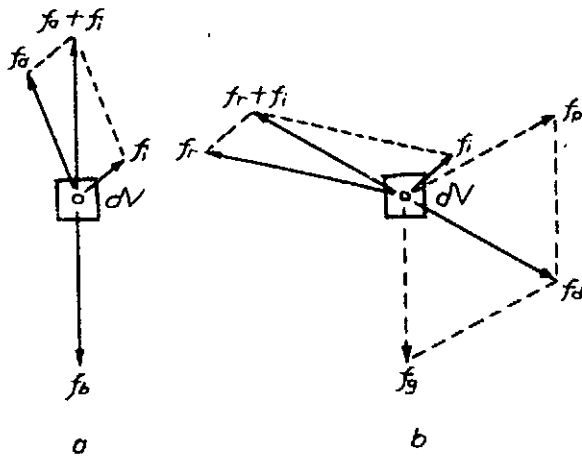


Fig. 6.- The forces which act upon a microscopic fluid element classified as surface force, body forces, and inertial force and b as driving force, resistive force, and inertial forces.

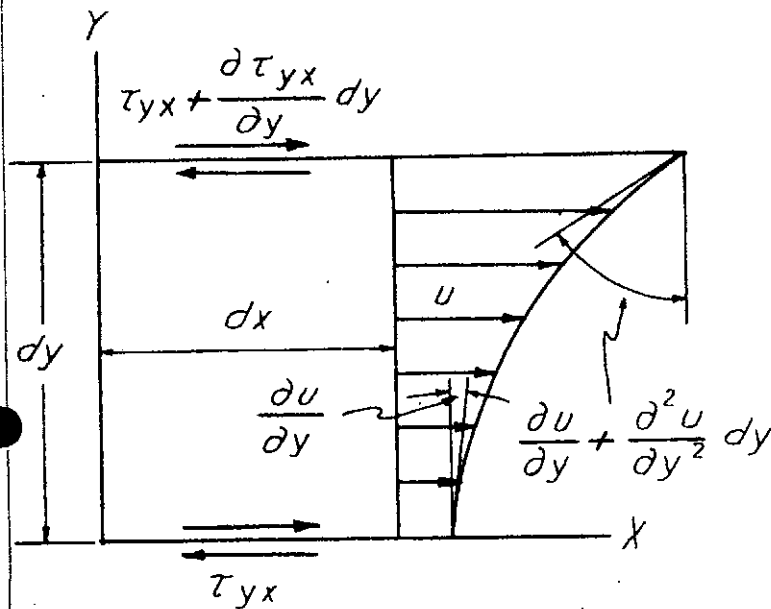


Fig. 7.- Manner of dependence upon the fluid velocity gradients of shearing stresses and unbalanced frictional forces acting upon microscopic fluid element.

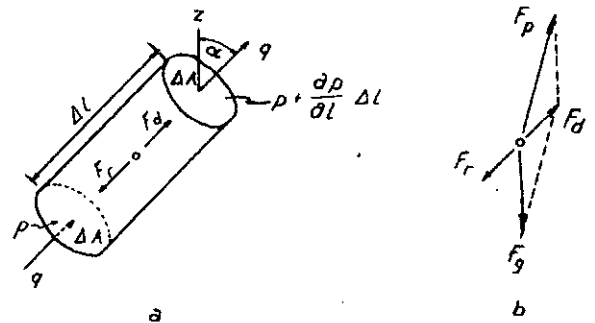


Fig. 8.- a, Forces acting upon macroscopic fluid volume element in direction parallel to flow; b, relation between forces parallel to flow and the total forces due to pressure gradient and gravity.

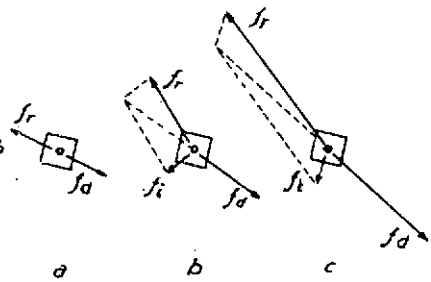
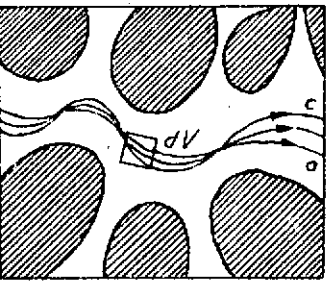


Fig. 9.- Schematic representation of the distortion of flowlines and forces equilibria by increase of fluid velocity. a, b, and c represent flowlines and corresponding forces acting upon fixed volume element dV at successively higher velocities. Darcy's law is valid only for case a.

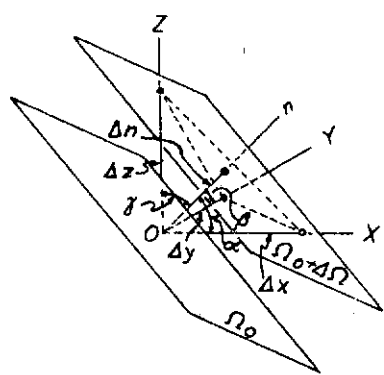


Fig. 10.- Space variation of continuous field of scalar quantity Ω .

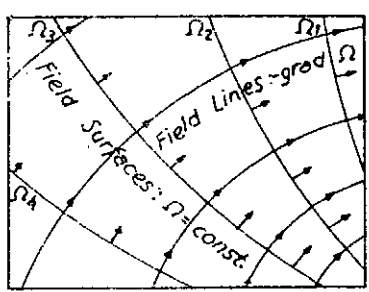


Fig. 11.- Relation between scalar field and derived vector field.

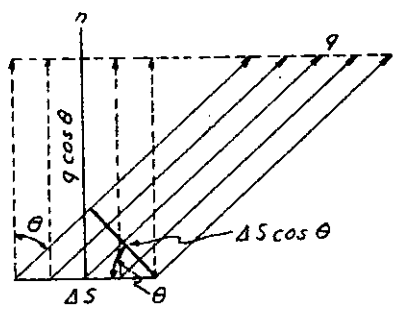


Fig. 12.- Vector properties of the specific volume discharge q .

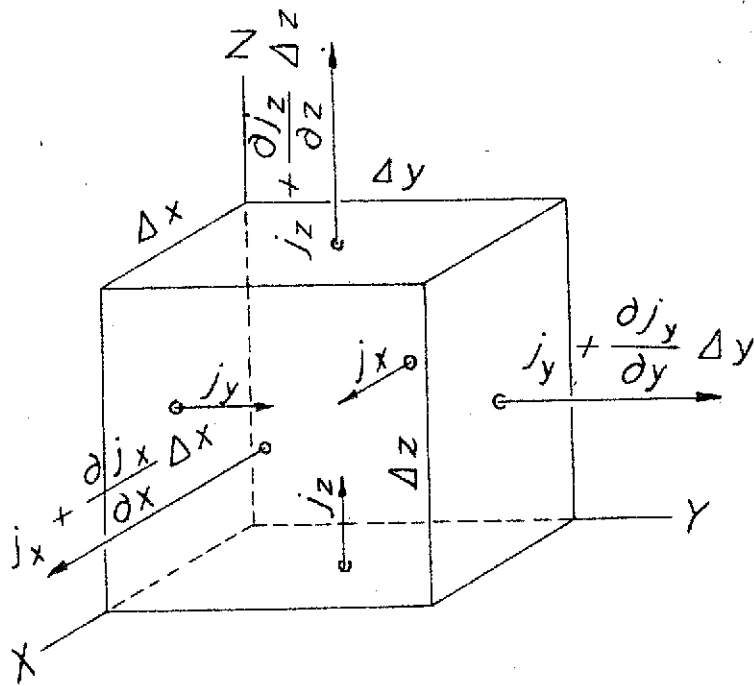


Fig. 13.- Mass discharge across the faces of macroscopic volume element.

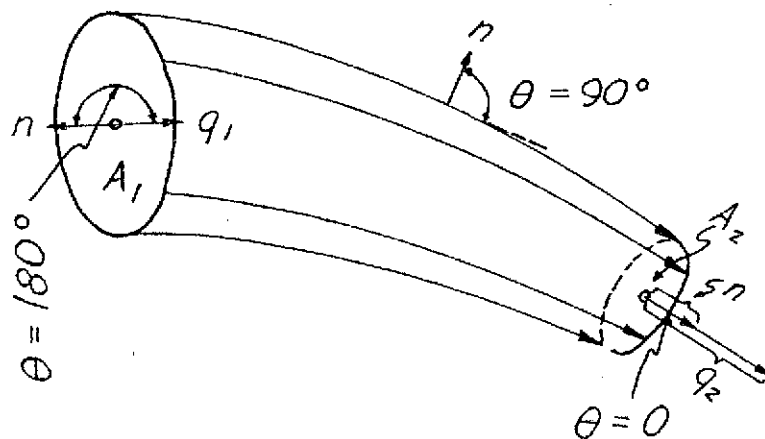


Fig. 14.- Net discharge over the surfaces of a stream tube.

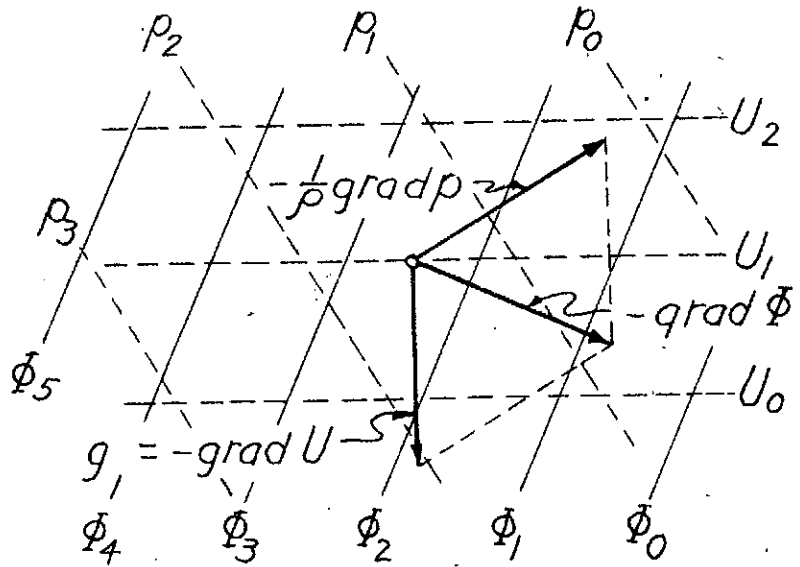


Fig. 16.- Relation between superimposed scalar fields of p , U , and ϕ , and their corresponding gradients.

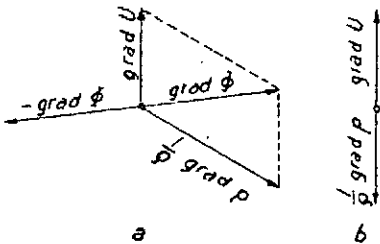


Fig. 15.- a, Vector relations between the gradients of the scalar fields of gravity potential, pressure, and fluid potential; b, condition for static equilibrium.

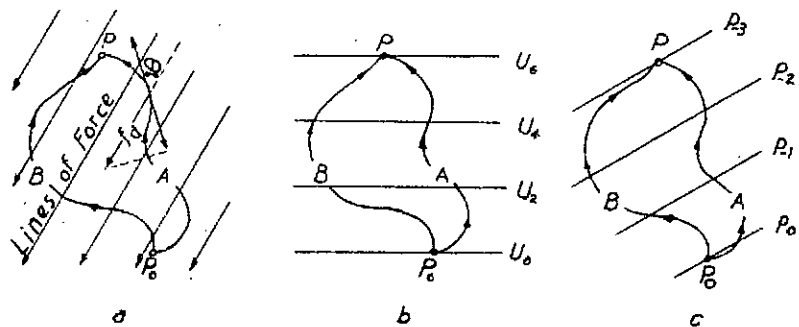


Fig. 17.- a, Fluid potential as a line integral in a field of forces; b and c, the corresponding line integrals in the scalar fields of p and U .

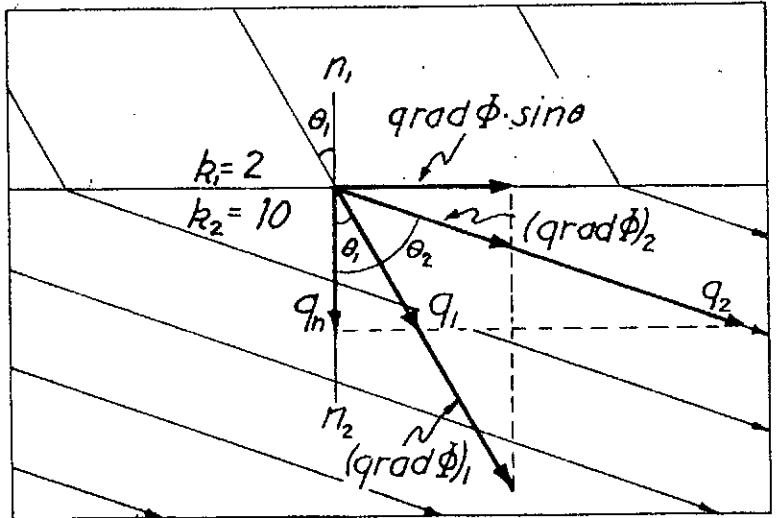


Fig. 19.- The refraction of flowlines at the interface between media of different permeabilities. The value of k_2/k_1 is here taken to be 5. The refraction obeys a tangent law.

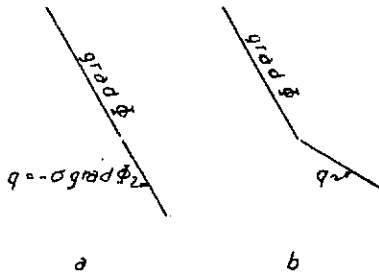


Fig. 18.- Vector representation of Darcy's law; a, for isotropic; b, for anisotropic media.

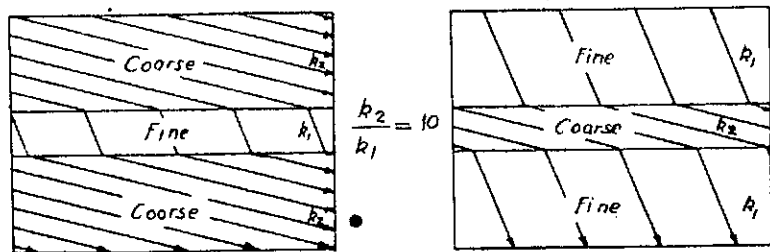


Fig. 20.- Refraction across layers of coarse and fine sand with a permeability ratio of 10.

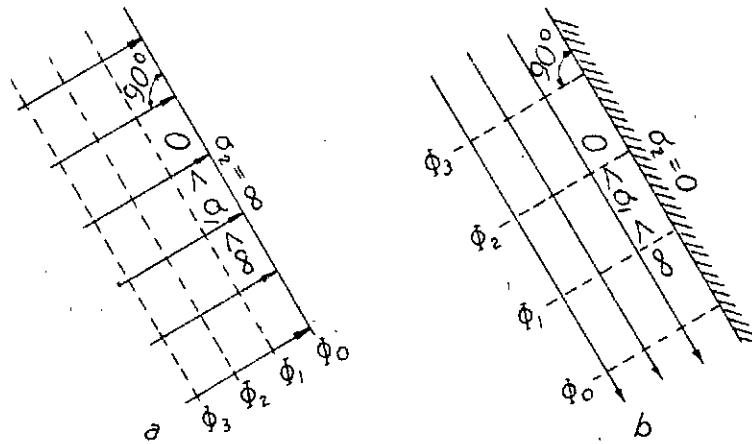


Fig. 21.- a, Flow from region of finite into one of infinite permeability; b, flowlines and equipotential surfaces along impermeable boundaries.

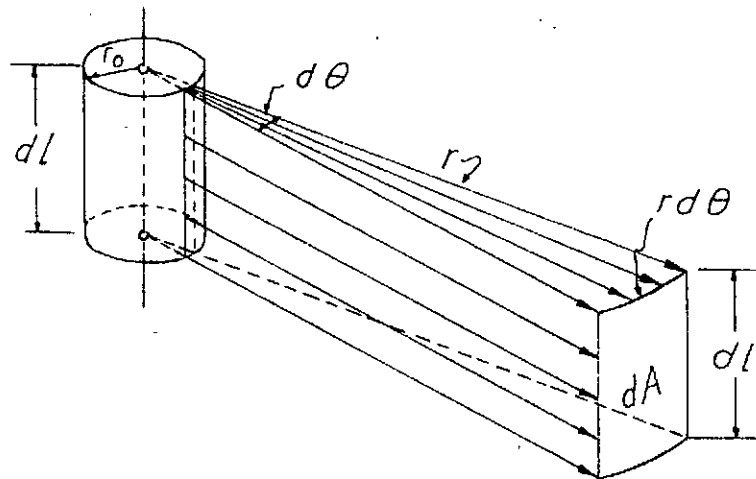


Fig. 22.- Elementary stream tube from line- or cylindrical-source.

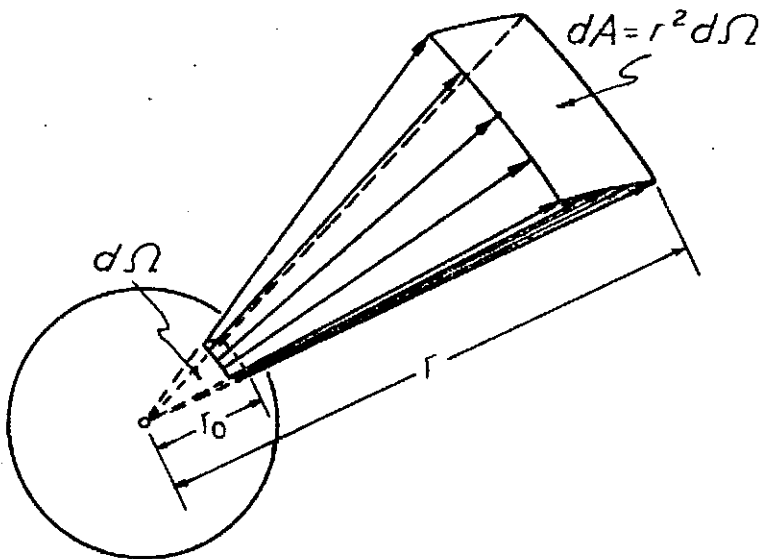


Fig. 23.- Elementary stream tube in flow from point- or spherical-source.

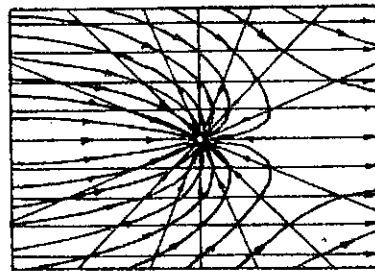


Fig. 24.- Graphical method of compounding two fields. The component fields are radial flow toward a line sink and rectilinear flow in the same plane. The flowlines are so spaced that between each pair the same discharge occurs. The method is "not applicable to other than the plane fields.

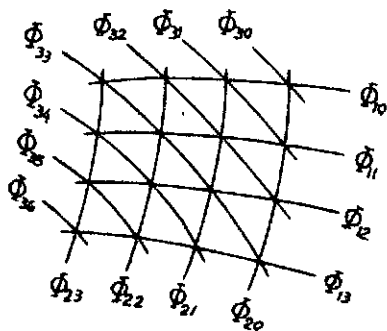


Fig. 25.- Graphical addition to potential fields Φ_3 is the sum of Φ_1 and Φ_2 .

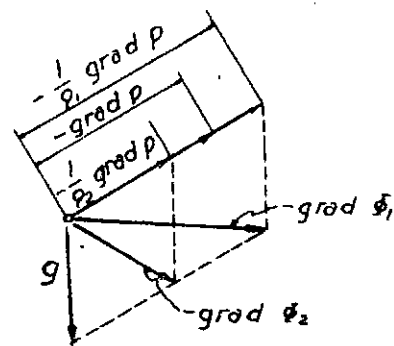


Fig. 26.- Forces acting upon elements of fluids of different densities placed at the same point.

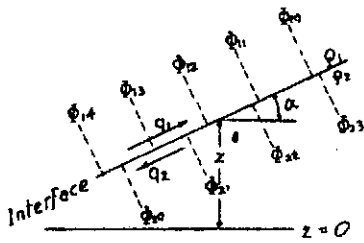


Fig. 27.- Tilt of fluid interface due to flow of both fluids.

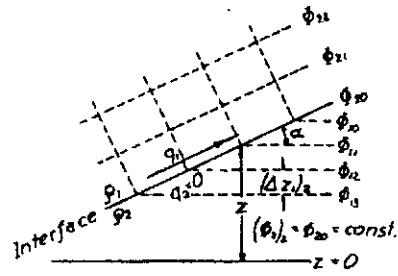


Fig. 28.- Tilt of interface and equipotential surfaces of both fluids when one fluid flows while the other is static.

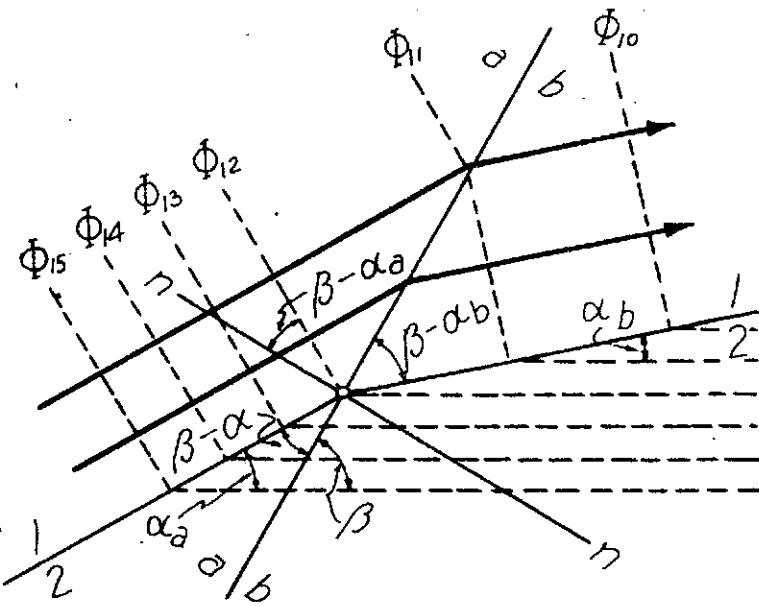


Fig. 29.- Diagram for the identification of quantities employed in discussing intersection of fluid interface with boundary between regions of different permeabilities.

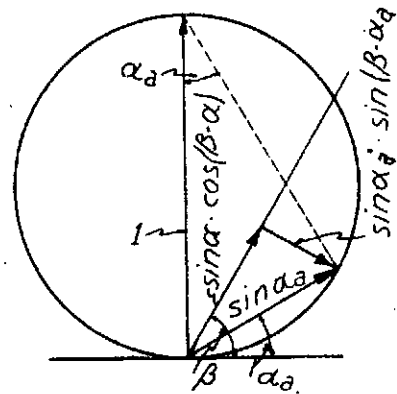


Fig. 30.- Graphical representation of equations (222) and (224).

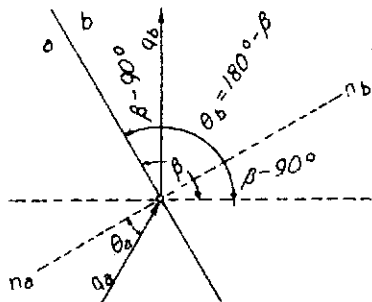


Fig. 31.- The angles referred to in equation (229).

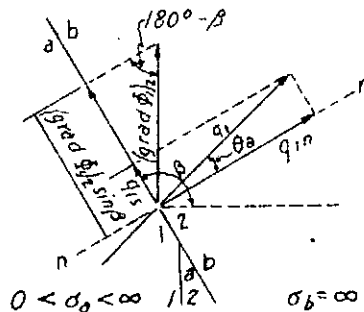


Fig. 32.- Manner of increase of the rate of flow of fluid 1 from region of finite permeability into one of infinite permeability occupied by fluid 2, as θ_a decreases.

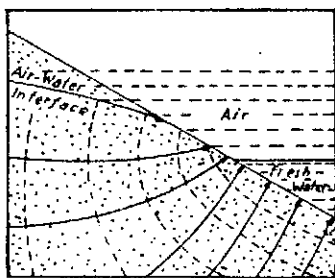


Fig. 33.- Approximate manner of flow of fresh water into open space containing bodies of air and fresh water.

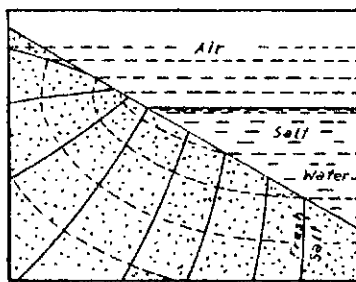


Fig. 34.- Approximate manner of flow of fresh water into open space containing air and salt water. Note orientation of the flowlines and the two interfaces as boundary to open space is approached.

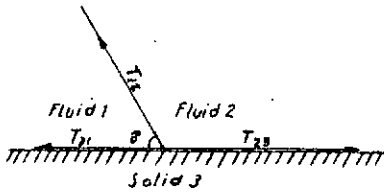


Fig. 35.- Surface tensions between two fluids and a plane solid.

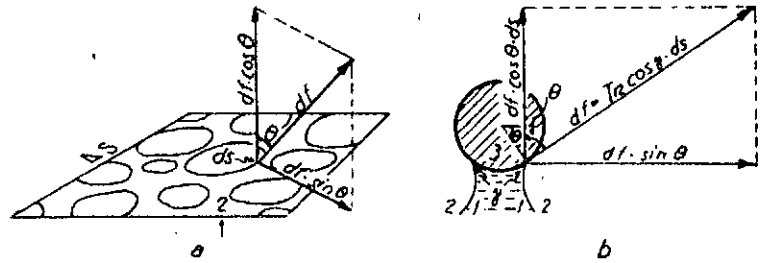


Fig. 36.- Macroscopic surface element of interface in sand between two fluids having surface tensions. a, Forces acting upon length ds of line of contact; b, detail of the same.

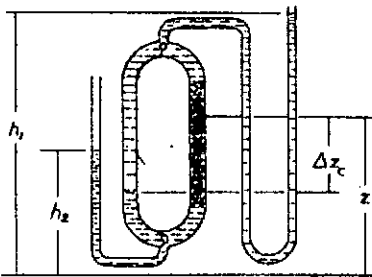


Fig. 37.- Equilibrium levels of the interface between two static liquids of different densities in an open space and in sand.

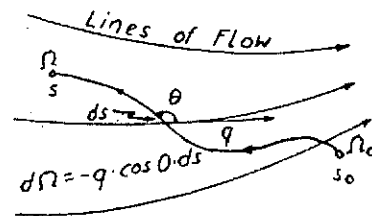


Fig. 38.- The line-integral by means of which a velocity potential Ω is defined.

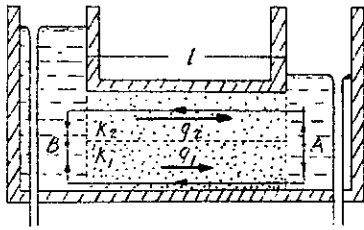


Fig. 30.- The velocity line-integral from A to B by two different paths traversing sands of different permeabilities.

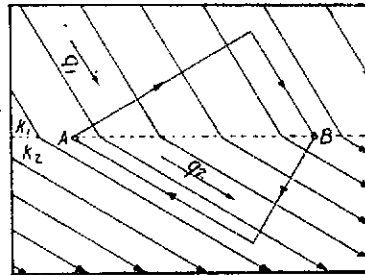


Fig. 40.- Line-integral around a closed path traversing regions of different permeabilities.

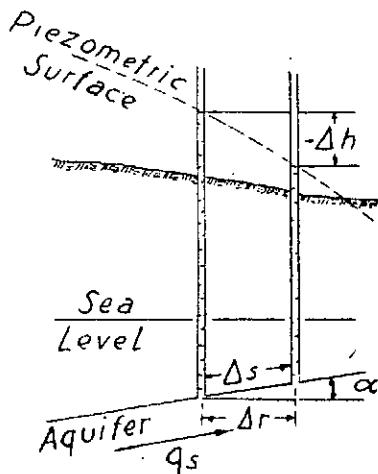


Fig. 41.- Section showing tilted aquifer and piezometric surface.

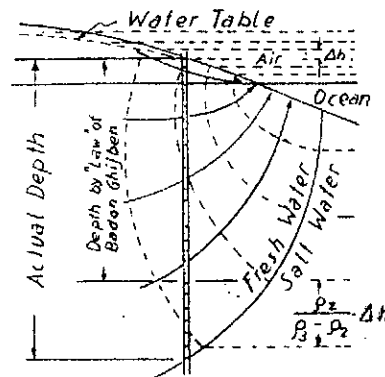


Fig. 42.- Discrepancy between actual depth to salt water and depth as calculated by "law" of Badon Ghijben and Herzberg for flow near outlet.

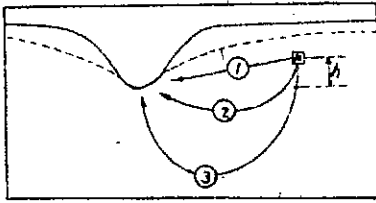


Fig. 43.- Flow from region A to outlet according to Swinnerton.

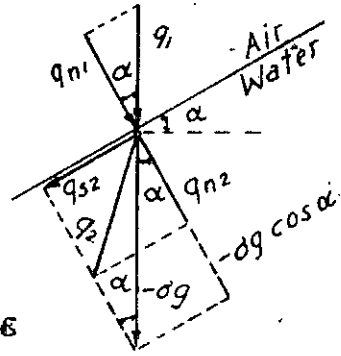


Fig. 44.- Flow vectors at air-water interface when downward infiltration of water occurs.

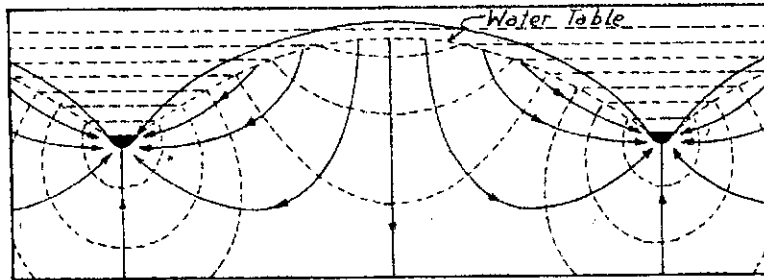


Fig. 45.- Approximate flow pattern in uniformly permeable material between the sources distributed over the air-water interface and the valley sinks.

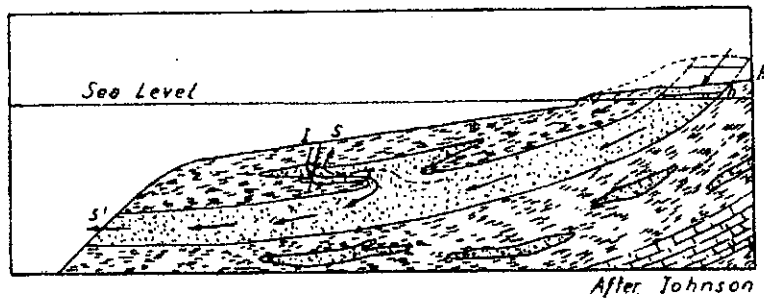


Fig. 46.- Johnson's Fig. 3

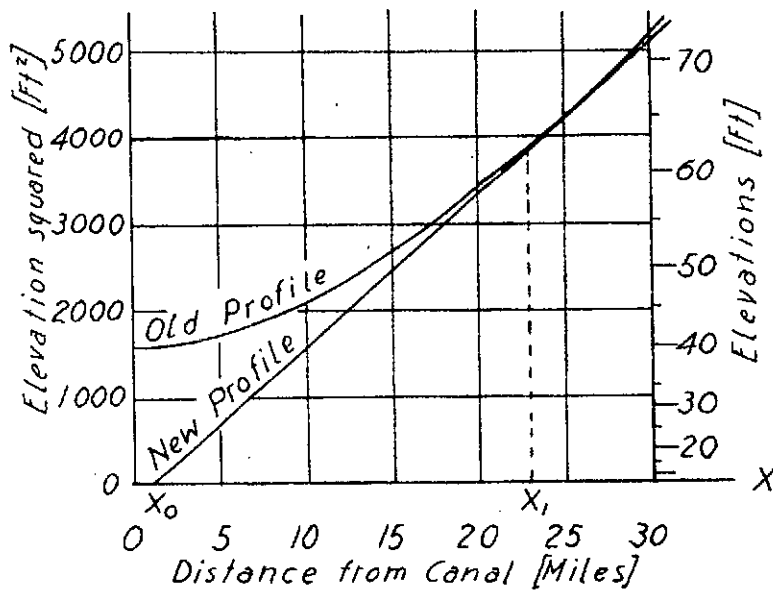


Fig. 47.- Comparison of the original ground-water profile south of the Florida ship canal with the limiting value of the one as calculated here.

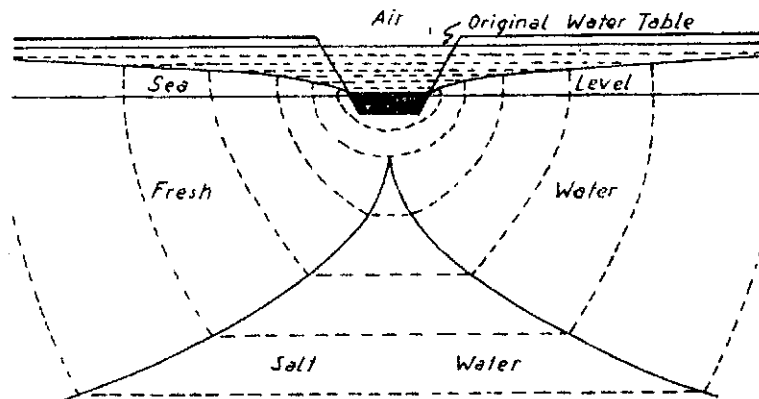


Fig. 48.- Schematic diagram showing approximately the type of relationship between the bodies of air, fresh water, and salt water to be expected near a sea-level canal in uniformly permeable material. The scales are greatly distorted. The depths to salt water should be four times those shown here.