TEORIAS ECONOMICAS ESPACIALES

Entrega correspondiente al bimestre noviembre -diciembre al Consejo Federal de Inversiones-Roberto Noel Domecq

I N D I C E

CAPITULO TERCERO

LOS MODELOS DE LEFEBER

Antes de analizar los modelos de Lefeber es conveniente presentar en una primera sección algunas notas sobre el multiplicador de Lagrange que es el util matematico utilizado por el autor para resolver los modelos presentados bajo la forma de programas.

Seccion 1ra. El multiplicador de LAGRANGE

Sea una curva representativa de una función f y su tangente t en un punto A (Figura 1) La perpendicular a la tangente en A esta indicada por la flecha p . En una primera aproximación el multiplicador de Lagrange se basa sobre el principio siguiente : la pendiente de p es la inversa negativa de la de t :

$$\text{Pendiente de } p = a/b$$

$$\text{Pendiente de } t = -\ b/a$$

Si t, en lugar de ser una recta , es una curva , las tangentes y las perpendiculares correspondientes, en un punto de contacto se confunden.

En el espacio bi- dimensional, la primera derivada define, en un punto de una función continua, la pendiente de la tangente ~~de la tangente~~ en ese punto.

En el espacio tri- dimensional, se trata de derivadas parciales . Sea la función $Z= f(x,y)$; tomar la derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial x}$ equivale a considerar y como constante, es decir a trabajar unicamente en un plano A (Figura 2)

Tomar la derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial y}$ equivale a considerar x como constante. Se trabaja ahora en el plano B únicamente.

Las proyecciones de las derivadas parciales sobre el plano xOy (indicadas con flechas en la figura 3) son entonces las componentes de la proyección sobre el mismo plano de la derivada total de la función.

La derivada total de una funcion tri-dimensional Z= f(x,y) dá, en cada punto , la pendiente máxima (o mínima) de la función. Esta función puede ser dibujada en un espacio a tres dimensiones, o uno puede representarla tambien en una forma bi-dimensional: una familia de curvas dará algunos valoes de Z para las cuales f(xy) es constantes (curvas de nivel) (figura 4)

Adoptemos la función : Z= 1/x - y

y buscamos las curvas en el plano xOy para los valores:

Z= 0

Z= -2

Z= -4

Tomamos ahora las derivadas parciales de la fucnción Z:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = -1$$

Remplazando x por el valor 1, por ejemplo, obtenemos las componentes $-\frac{1}{1}$ y -1 de la proyección de la derivada total .

En el ejemplo elejido , el resultado es el mismo para todos los puntos de la misma abscisa ,porque $\frac{\partial z}{\partial y}$ es constante.

Esta proyección de la derivada total da el sentido de la mayor pendiente del a función Z en cada punto. Es la perpendicular a la tangente de la curva (Z= cte.) en el punto elejido.

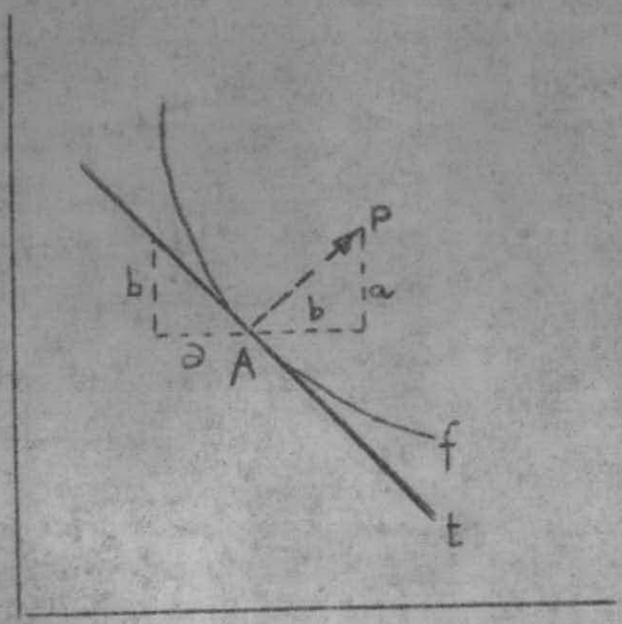


Fig 1

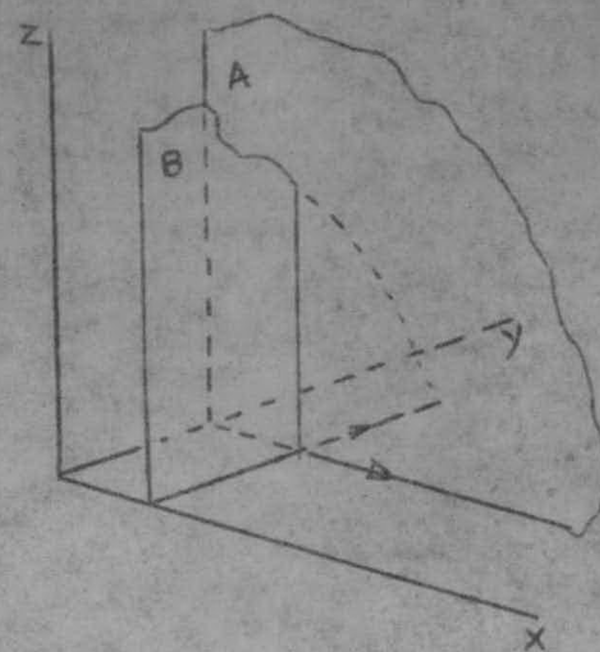


Fig 2

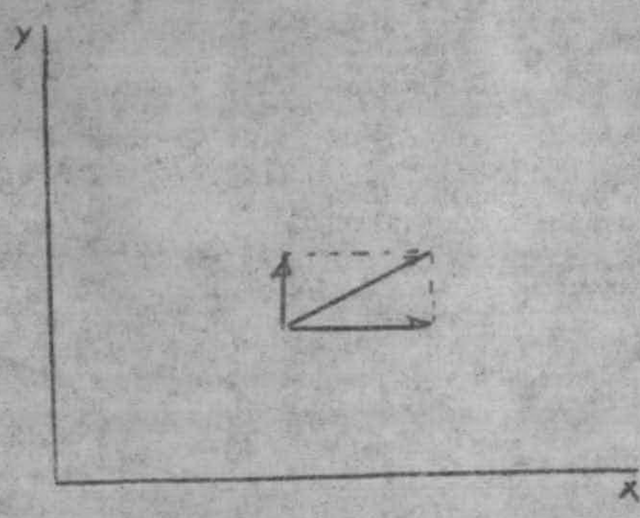


Fig 3

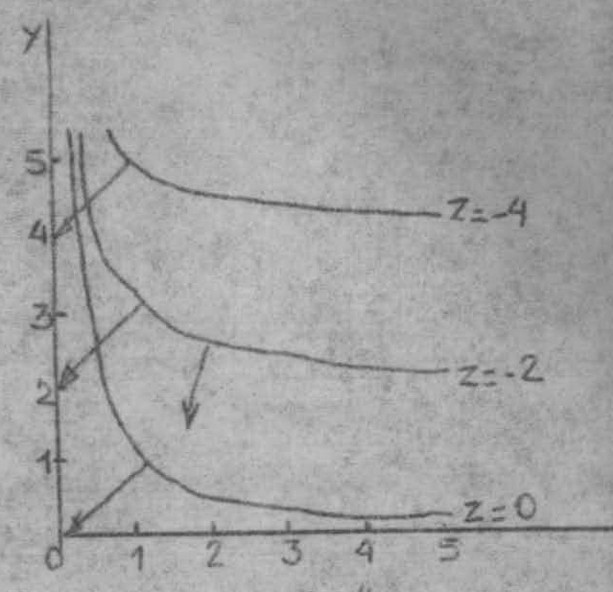


Fig 4

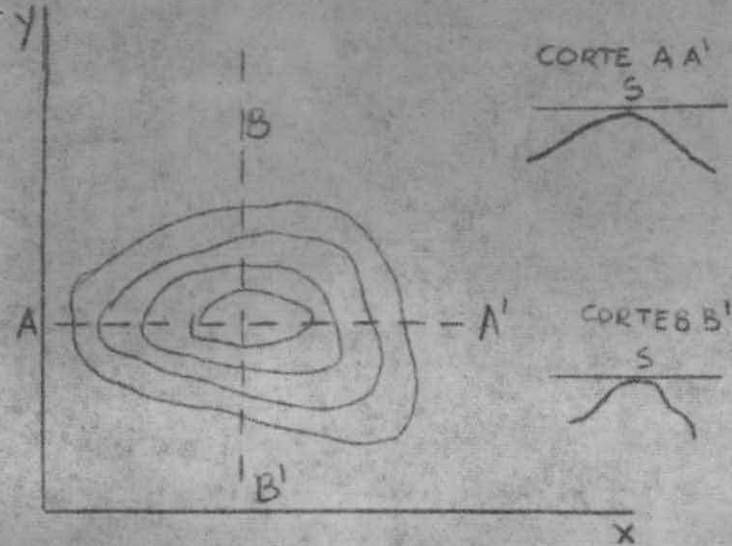


Fig 5

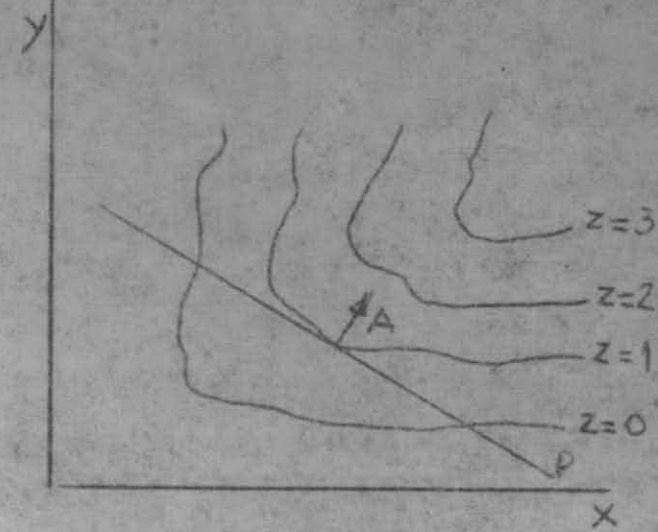


Fig 6

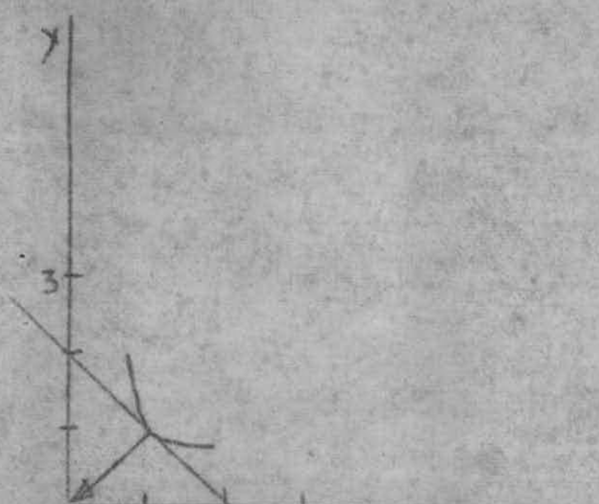


Fig 7

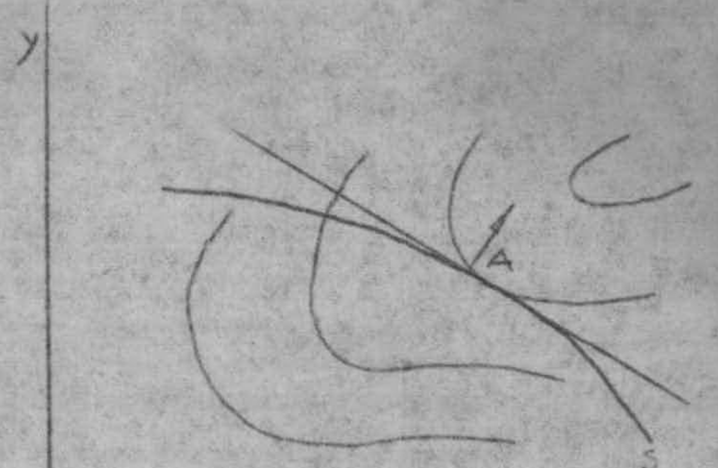


Fig 8

Los máximos o minimos de una función tridimensional pueden ser buscados para una función que tenga o no una restricción:

a)Maximos o mínimos sin condiciones:

Las curvas de nivel representan una colina de vertice S.Todos los puntos de una de las curvas correspondientes a un valor constante de Z. En el vertice las dos derivadas parciales son iguales a 0 (Figura 5).

b)Maximo o mínimo con condiciones:

Si ahora se debe buscar los máximos y mínimos de una función con ~~xxxxxx~~ tres incongnitas pero con una restricción sumplementaria,cual es el procedimiento?

Sea un plano vertical P en el espacio tri-dimensional que corta a la superficie representada por la función Z. Se desea conocer el máximo de Z situado situado sobre el plano P. Este plano vertical esta representado en el espacio bi-dimensional por una recta que corta a la familia de curvas de la función Z (Figura 6)

Partiendo de uno de los extremos de la recta P, se encuentran sucesivamente las curvas Z de valor cada vez mas grande , luego cada vez mas pequeñas. Donde ha pasdo por el máximo condicional?

Este no puede ser otro que el punto A, en el lugar donde P es tangente a la curva de nivel mas elevada.

Para encontrar A uno hace uso de la propiedad citada mas arriba , según la cual F es , en A , perpendicular a la linea de mayor pendiente en ese punto.

Volvamos a tomar el ejemplo de la función:

$$Z = \frac{1}{x} - y$$

Agregando la condición suplementaria

$$x + y = 2 \quad \text{(plano P)}$$

y busquemos el máximo condicional.

La pendiente de la recta s (condicion) es igual a -1 (figura 7) En el punto de tangencia con aquella curva de Z que correspondera al máximo de esta función , la pendiente máxima tendra valor 1 . Esta cifra 1 resulta así de la relación

$$\frac{\partial z}{\partial y} \Big/ \frac{\partial z}{\partial x}$$

Retomando las derivadas parciales obtenidas precedentemente ,podemos escribir la ecuación;

$$\frac{-1}{-\frac{1}{x^2}} = 1 \qquad \text{donde} \quad x^2 = 1$$

El máximo condicional se encuentra en la abscisa x=1 ,su ordenada resulata del reemplazo de x por este valor en la función condicional:

$$1 + y = 2$$

de donde $y = 1$

Y $Z_{max.}$ será igual $1/1-1 = 0$

La función condicional puede ser también representada por una curva (figura 8)

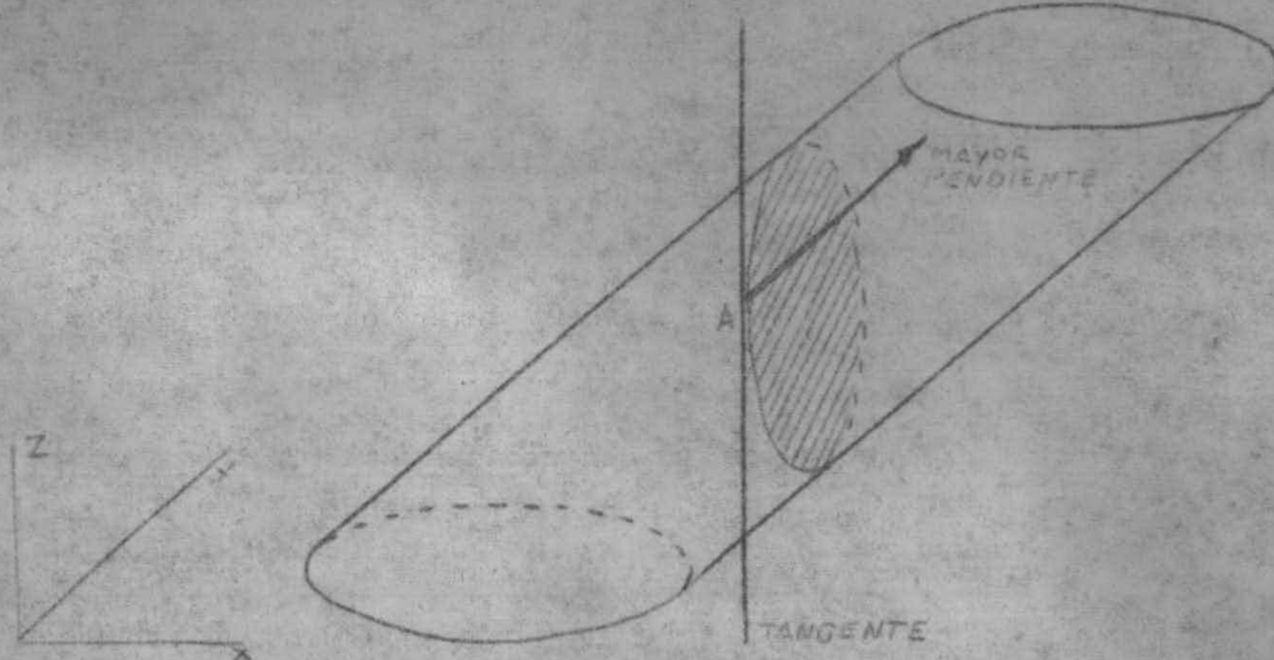
En el máximo condicional A, la pendiente máxima de la función Z sera perpendicular a la tangente en este punto de la función condicional s . Pero esto solo es valido para el plano xOy. En el espacio de tres dimensiones , pendiente máxima y tangente no serán necesariamente perpendiculares, si bien ellas estaran una con respecto a la otra en una cierta relación. (Figura 9)

Si s forma parte de una familia de curvas ("s" es ahora como Z la representación de una función de tres variables) La mayor pendiente en A de esta función s tendra lá misma dirección que la mayor pendiente de Z en el mismo punto,pero sus valores en lugar de ser iguales esta ran en una relación definida por la ecuación siguiente:

$$\frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\dfrac{\partial s}{\partial x}} = \frac{\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\dfrac{\partial s}{\partial y}} = -\lambda$$

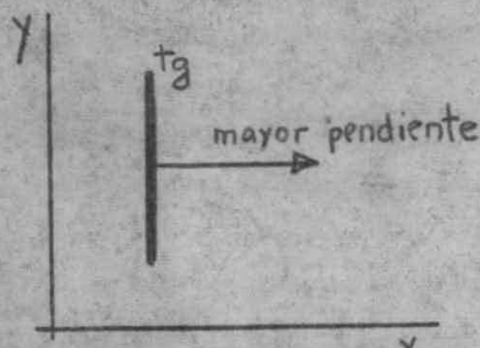
λ es el multiplicador de LAGRANGE

Esta última relación puede tambien escribirse bajo la forma siguiente:



En el espacio de tres dimensiones ,la tangente en A, que forma parte del plano secante no es perpendicular a la flebha de mayor pendiente.

Pero ella es en la proyección sobre el plano xy:



1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial s}{\partial x} = 0$

2) $\dfrac{\partial z}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial s}{\partial y} = 0$

Nosotros tenemos dos ecuaciones y tres incognitas. Para resolver el sistema es necesario una tercera ecuación que será la de la condición suplementaria :

3) $f(x,y) = 0$

En el ejemplo de mas arriba tenemos entonces:

1) $-\dfrac{1}{x^2} + \lambda = 0$

2) $-1 + \lambda = 0$

3) $x + y - 2 = 0$

De donde: $\lambda = 1$

$x = 1$

$y = 1$

Practicamente, esto equivale a considerar una función t del siguiente tipo:

$$f(t) = f(z) + \lambda f(s)$$

Se toma ahora y se anulan las dos derivadas parciales de esta función t considerandoa como constante:

1) $\dfrac{\partial t}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial x} + + \lambda \dfrac{\partial s}{\partial x} = 0$

2) $\dfrac{\partial t}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial s}{\partial y} = 0$

y se agrega la ecuación de la función condicional (la restricción)

3) $f(s) = 0$

La generalización a un espacio de n dimensiones, con m condiciones suplementarias, dá la formulación siguiente:

$$f(T) = f(z) + \sum_{1} \lambda_i f(s_i)$$

Donde T y Z contienen n incognitas.

Las n derivadas parciales de esta función dan las n ecuaciones que se completan por las m relaciones (Pues hay m multiplicadores de LAGRANGE)

$$f(s_i) = 0$$

(Se sobrepasa así las caracteristicas de un programa lineal , pues la función a optimizar y las restricciones no son necesariamente lineales)

Sección Segunda

EL SISTEMA ESPACIAL DEL EQUILIBRIO GENERAL

Lefeber (1) sigue un objetivo próximo al de ISARD y se inspira el tambien en la teoría del equilibrio general de Walras. Su enfoque se dirige hacia la producción. El acento esta puesto en la asignación optima de los recursos y la distribución optima de los productos en el espacio, los precios estan dados sobre los diferentes mercados, o estando dados una relación de bienestar para los grupos de consumidores espacialmente separados.(Se notara de un punto de vista general que la ausencia de una teoria de la demanda y una teoria de la repartición es una de las grandes debilidades del analisis espacial)

Las condiciones de optimo para la satisfacción de los consumidores individuales no son discutidad, aunque las relaciones significativas pueden ser agregadas al analisis al predio de un incremento correspondiente del número de ecuaciones

Lefeber presenta tres modelos, progresivamente complicados, peró reposando sobre hipotesis generales identicas.

Estas son bastantes diferentes de las de Isard, sobre todo aquellas del modelo de 1956

Lefeber retiene la hipotesis general de un numero fijo de puntos de localización discontinuos .

La producción y el consumo pueden tomar lugar en cada uno de estos puntos.

Cada punto esta dotado de una combinación de diferentes recursos o factores productivos, en cantidades dadas no negativas.

Los recursos , si ellos estan localizados en el lugar, no pagan transporte

Lefeber, Allocation in Space. North Holland Publ.Co.1958

Todos los recursos de una localización cualquiera que pueden ser utilizados en toda otra localizaciónpor una o varias industrias son afectados por un costo de transporte.
Esta hipotesis solo vale si los factores productivos ofrecidos bajo la forma de flujos son separables de la fuente de flujo . (Ejemplo:el trabajo a condición de que él se desplace , de lo contrario es intransportable)
Si la producción se localiza en un punto carente de recursos, los factores transportables pueden ser transportados hacia los puntos en que seran utilizados como inputs. Los factores no transportables pueden entonces quedar inempleados.
Cada punto discontinuo de localización puede servir tambien como localización de la consumición ,que puede coincidir o no con los puntos elegidos por la producción . Los consumidores forman un mercado en su lugar de residencia .
Como las condiciones de la satisfacción del consumidor ,no son discutidas ,el número exacto de consumidores en cada localización de consumo , no es significativo en este análisis .
Los precios ,para los bienes identicos ,pueden variar con la localización de los mercados ; pero estos precios de los bienes finales son considerados como dados para cada mercado.
Como consecuencia de estas hipotesis, y de un punto de vista técnico, la producción de cualquier bien puede situarse en cualquiera de los lugares específicos , sin relación a la disponibilidad local de los recursos o a la existencia de un mercado. La localización no coincidirá necesariamente con las fuentes de los inputs o con la localización de los merdados No importa que número de bienes diferentes puede ser producido en toda localización singular.

El modelo de distribución geográfica de los puntos discretos no esta explicitamente especificado. Su numero exacto esta dado , y todos ellos son a priori utilizables para la producción. Lefeber los supone conectados por rutas .La ruta mas corta entre dos puntos es establecida en terminos de distancia. No es necesario que una conexión directa existe entre todo par de puntos .
Para toda cupla de puntos , coeficientes son calculados que expresan las unidades de servicios de transporte necesarios para transportar una unidad de todo bien o recurso de un lugar a otro.
Si los servicios de transporte deben ser medidos en toneladas-Kilometro las dimensiones de los coeficientes seran dados en toneladas-Kilometro por unidad de bien o de recurso.
El coeficiente multiplicado por la cantidad del objeto a transportar entre los puntos dados determina el monto de los servicios de transporte " demandado " para cumplir esta tarea. Toda distribución de bienes y la asignación simultanea de factores implicara una demanda total correspondiente para los servicios de transporte . Esto para ser expresado entonces por una relación donde la demanda total de transporte es una función de las cantidades variadas de bienes y de factores entre los pares de puntos especificos. Se notara que esta demanda de transporte do debe ser confundida con el uso mas corriente del termino ; estos paramentros son solamente tecnólogicos y dependen solamente de los pesos y las distancias.
Los servicios de transporte son suministrados por una industria separada. Los inputs consumidos por esta industria de transporte son los mismos que en las otras industrias. Por hipotesis (simplificadora) los recursos necesarios como inputs para los servicios de transporte no pueden ser transportados. No hay transporte vacio.

El autput total de los servicios de transporte debe ser determinado simultaneamente con el modelo espacial de la producción y con la distribución de los bienes finales. El monto total de los recusros y la cantidad de bienes a transportar define la exacta cantidad de transporte"demandada" que , a su turno, debe ser satisfecha por el autput total , es decir la " oferta" de transporte.

El analisis reposa sobre la hipotesis de la concurrencia pura:ningun preductor puede intervenir sobre los precios de mercado. Ulteriormente la discusión se referira a las situaciones donde la convexidad de la región posible definida por la superficie de transformación establecida.

En este contexto , el sentido de la convexidad es tal, que si dos programas cualquiera estan en el interior de la región posible, toda media ponderada normalisada de los dos programas esta tambien en la misma región.

Un vez establecida la convexidad , la existencia de un máximo lo esta también. A este fin, las condiciones se limitan a las funciones homogeneas de primer orden para satisfacer la condición de adición . Los rendimientos no-proporcionales son excluidos aquí (los rendimientos crecientes pueden ser considerados siempre que no sean muy fuertes como para interferir con la convexidad de la región de transformación)

Se vé así que Lefeber busca procedimientos operaciona es, mientras que ISARD busca procdimientos analiticos

Para simplificar ,Lefeber supone solamente dos localizaciones posibles para la producción . Cada una esta dotada de una cantidad no negativa de dos tipos de factores productivos transportables.

Dos bienes pueden ser producidos en cada localización , o en las dos. Hay dos puntos de consumo o de mercado , separados espacialmente de los puntos de producción y uno del otro.

Notación:

x_c^{ab} = bien a producido en el punto b y consumido en c

x^{ab} = monto total del bien a producido en b

v_{de}^{ab} = factor de producción d que viene de la localización e empleado en la producción del bien a en el lugar b.

Los modelos son a dos puntos, dos factores , dos bienes producidos: a,b,c,d y e pueden tomar el valor uno o dos.

x^{n+1} = monto total del transporte producido o demandado.

v_{de}^{n+1} = factor d salido de e empleado en la producción de transporte

Si n es el numero de industrias productoras de bienes finales, el transporte sera indicado por x^3 aquí.

T = demanda de transporte

ρ^n = función de producción de bienes

ρ^{n+1} = función de producción del transporte

ℓ^3 = función de oferta del transporte

Examinaremos ahora los tres modelos sucesivos presentados por Lefeber , o mas exactamente el desarrollo progresivo de un modelo en tres etapas

EL PRIMER MODELO : Influencia de la repartición espacial de los factores de producción sobre la localización de las empresas .

A- Esquema general

Lefeber elimina la distribución (los bienes producidos son transportados gratuitamente)

Hay una sola industria por punto; lo que dá dos localizaciones: 1 y 2 , donde se produce x^1 y x^2 , mas el auput de transporte x^3

Cada producto demanda dos factores de producción: V_1 y V_2

producto

V^2_{11} $\qquad V_{21} \qquad V_{12} \qquad V_{22}$

bien lugar bien

producto

pero se debe tener en cuenta el destino del input: V^2_{11}

Sean las cantidades producidas:

$$x^1 = f^1\left(V^1_{11} + V^1_{12}, V^1_{21} + V^1_{22}\right)$$

$$x^2 = f^2\left(V^2_{11} + V^2_{12}, V^2_{21} + V^2_{22}\right)$$

la demanda de transporte :

$$x^3 = f^3\left(V^2_{11} + V^1_{12}, V^2_{21}, V^1_{22}\right)$$

que encuentra una oferta de transporte que es igual:

$$x^3 = f^3\left(V^3_{11} + V^3_{12}, V^3_{21} + V^3_{22}\right.$$

La oferta global de factores esta entonces repartida entre tres demandantes , la producción 1 (en 1) ,la producción 2 (en 2) y el transporte :

$$V_{11} = V^1_{11} + V^2_{11} + V^3_{11} \qquad \text{etc...}$$

Lefeber quiere maximizar la producción de un bien sin que la producción del otro sufra (Asi pues en el sentido de Pareto) Es necesario admitir que los inputs de transporte no deben ellos mismos ser transportados; dé donde tenemos 4 casos:

1.- Todos los factores disponibles en 2 ($V_{12} + V_{22}$)

son comprometidos en la producción en ese punto. Solo los factores en 1 pueden ser empleados para los transportes (parcialmente)

2.- V_{12} es totalmente comprometido en 2

V_{21} es totalmente comprometido en 1

V_{11} y V_{22} pueden ser solo empleados para los transportes (parcialmente)

3.- La inversa del caso 1

4.- La inversa del caso 2

Datos :

-la cantidad de factores localmente disponibles

-los nivles de producción local

-los coeficientes tecnicos.

B.-Empleo del programa lineal

Se trata de encontrar el optimo de localización. La función economica a maximizar será el valor de la producción total. Los precios de 1 y de 2 son datos: W_1 y W_2 .-

El máximo sera alcanzado cuando la relación de precio entre ellos se combine de manera optima con el empleo total de los factores

La función es:

$$Z = W_1 x^1 + W_2 x^2$$

Lefeber dá un ejemplo numérico , en el que los coeficientes técnicos son los siguientes:

Tabla de coeficientes técnicos

Coeficientes de Leontieff:

$- \frac{V^1_1}{x^1} = 1/10 \qquad \frac{V^1_2}{x^1} = 1/10$

$- \frac{V^2_1}{x^2} = 1/20 \qquad \frac{V^2_2}{x^2} = 1/20$

$- \frac{V^3_1}{x^3} = 4/10 \qquad \frac{V^3_2}{x^3} = 4/10 \quad \left(x^3 = \frac{V^3}{4/10} \right)$

Cantidades globales de factores disponibles en cada lugar:

$$V_{11} = 100$$
$$V_{12} = 200$$
$$V_{21} = 200$$
$$V_{22} = 100$$

Once restricciones surgen de estas hipotesis:

1) el factor 1 en 1 y en 2 para la producción 1 (en 1) debe ser ofrecido en cantidades al menos igual a las necesaria, es decir a aquella definida por el número de autputs (x^1) multiplicado por el coeficiente de Leontief propio del factor 1.

$$V_{11}^1 + V_{12}^1 \geq 1/10 \; x^1$$

2) la misma exigencia para el factor 2 :

$$V_{21}^1 + V_{22}^1 \geq 1/10 \; x^1$$

3) la misma exigencia para el factor 1 comprometido en 2 :

$$V_{11}^2 + V_{12}^2 \geq 1/10 \; x^2$$

4) lo mismo para el factor 2 en 2

$$V_{21}^2 + V_{22}^2 \geq 1/20 \; x^2$$

5) lo mismo para el transporte; la demanda del factor 1 debe ser satisfecha por las ofertas de las dos localidades:

$$V_{11}^3 + V_{12}^3 \geq 4/10 \; x^3$$

6)lo mismo para la demanda del factor 2 :

$$V_{21}^3 + V_{22}^3 \geq 4/10 \; x^3$$

7) en el peor de los casos , si todos los factores deben ser transportados , el total de la demanda de factores no deberá exeder la oferta de los medios de transporte, teniendo presente la hipotesis que el

transporte de una unidad de un bien exige una media unidad de transporte:

$$x^3 \geqslant \tfrac{1}{2} v_{11}^2 + \tfrac{1}{2} v_{12}^1 + \tfrac{1}{2} v_{21}^2 + \tfrac{1}{2} v_{22}^1$$

Finalmente los recursos de factores son limitados: la suma de las cantidades empleadas en las diferentes actividades no puede exceder en un lugar , la cantidad disponible Se escribe:

8) $V_{11} = 100 \geqslant V_{11}^1 + V_{11}^2 + V_{11}^3$

9) $V_{12} = 200 \geqslant V_{12}^1 + V_{12}^2 + V_{12}^3$

10) $V_{21} = 200 \geqslant V_{21}^1 + V_{21}^2 + V_{21}^3$

11) $V_{22} = 100 \geqslant V_{22}^1 + V_{22}^2 + V_{22}^3$

Lefeber utiliza ahora el método de el multiplicador de Lagrange presentado en la primera sección.

EL SEGUNDO MODELO: Extensión del programa a los centros de consumo

Los centros de consumo no coinciden con los centros de producción El transporte hacia los centros de consumo no es gratuito.

Sean: 2 lugares de producción : 1 y 2

2 lugares de consumo : 3 y 4

Se introducen aquí nuevos simbolos:

x^1_3 designa el producto 1 consumido en 3

x^1_4 " " " 1 " " 4

x^2_3 " " " 2 " " 3

x^2_4 " " " 2 " " 4

Lo mismo para los precios:

w^1_3 designa el precio del producto 1 vendido en 3

w^1_4 " " " " " 1 " " 4

w^2_3 " " " " " 2 " " 3

w^2_4 " " " " " 2 " " 4

Como los precios de los productos dependen de la localización de los consumidores, se maximizará:

$$Z = W^1_3\, x^1_3 + W^2_3\, x^2_3 + W^1_4\, x^1_4 + W^2_4\, x^2_4$$

Algunas restricciones son agregadas ;otras son modificadas:

<u>restricciones nuevas:</u> hay dos , pués el consumo no puede sobrepasar la producción:

$$x^1_3 + x^1_4 \leq x^1$$

$$x^2_3 + x^2_4 \leq x^2$$

restricciones modificadas: la inecuación (7) de los transportes: los cuatro primeros terminos se mantienen invariables, pero otros cuatro son agregados para tener en cuenta el transporte de los productos finales desde los lugares de producción hasta los lugares de consumo. Se admite siempre que el transporte de una unidad de un bien requiere media unidad de transporte; se tiene:

$$\frac{1}{2} V^2_{11} + \frac{1}{2} V^1_{12} + \frac{1}{2} V^2_{21} + \frac{1}{2} V^1_{22} + \frac{1}{2} X^1_3 + \frac{1}{2} X^1_4 + \frac{1}{2} X^2_3 + \frac{1}{2} X^2_4 \leq X^3$$

<u>EL TERCER MODELO</u> : Generalización.

Se conservan siempre dos puntos ; la ampliación consiste en introducir la posibilidad de producir los bienes 1 y 2 tanto en los lugares 1 <u>o</u> 2 que en 1 <u>y</u> 2 .-

El objetivo es maximizar la suma total de los diferentes bienes despachados a todos los merdados. Pero sobre cada mercado los bienes identicos pueden llegar desde las diferentes localizaciones de la producción. El precio de los bienes homogeneos sobre el mismo mercado deben ser uniformes, cualquiera sea su origen.

Sean W^1_1 y W^2_1 los precios sbre el primer mercado

W^1_2 y W^2_2 los precios sobre el segundo mercado

Se debe maximizar el valor de todos los productos sobre los dos mercados:

$$(1)\quad Z = W^1_1\left(X^{11}_1 + X^{12}_1\right) + W^2_1\left(X^{21}_1 + X^{22}_1\right) + W^1_2\left(X^{11}_2 + X^{12}_2\right) + W^2_2\left(X^{21}_2 + X^{22}_2\right)$$

Las condiciones de restricción sobre las que debe ser maximizado son expresadas bajo la forma de desigualdades:

A. Demanda y Oferta de transporte

La demanda de transporte debe ser mayor o igual a la oferta de servicios de transporte.

El costado izquierdo de la desigualdad representa la demanda de transporte , y el derecho la oferta de transporte:

$$(2)\quad T\left(V^{12}_{11} + V^{22}_{11},\ V^{12}_{21} + V^{22}_{21},\ V^{11}_{12} + V^{21}_{12},\ V^{11}_{21} + V^{21}_{22},\ x^{11}_1, x^{12}_1, x^{21}_1, x^{22}_1, x^{11}_2, x^{12}_2, x^{21}_2, x^{22}_2\right) \leq$$
$$\leq \rho^3\left(\sum_J V^3_{1J},\ \sum_J V^3_{2J}\right)$$

La función de demanda refleja el hecho de que cada factor proveniente de una localización cualquiera puede ser utilizado en la otra localización de la producción, y los bienes producidos en un lugar de producción pueden ser transportados a una localización cualquiera de consumo.

La función de oferta es tal que dos factores identicos provenientes de localizaciones diferentes son utilizados como factores homogeneos.

En el equilibio , la demanda es igual a la oferta.

B.- Distribución y oferta de bienes finales

Puesto que cada bien producido en una de las dos localizaciones de producción puede ser consumido en una de las localizaciones de consumo, se tienen cuatro relaciones de oferta que dirigen la distribución de los bienes finales.

Se advierte que las funciones de producción que corresponden a los bienes identicos producidos en localizaciones diferentes son iguales

las relaciones de oferta son las siguientes:

$$(3)\quad x_1^{11} + x_2^{11} \leq x^{11} = f^1 \left(\sum_J v_{1J}^{11} , \sum_J v_{2J}^{11} \right)$$

$$(4)\quad x_1^{12} + x_2^{12} \leq x^{12} = f^1 \left(\sum_J v_{1J}^{12} , \sum_J v_{2J}^{12} \right)$$

$$(5)\quad x_1^{21} + x_2^{21} \leq x^{21} = f^2 \left(\sum_J v_{1J}^{21} , \sum_J v_{2J}^{21} \right)$$

$$(6)\quad x_1^{22} + x_2^{22} \leq x^{22} = f^2 \left(\sum v_{1J}^{22} , \sum_J v_{2J}^{22} \right)$$

Los factores identicos provenientes de localizaciones diferentes son considerados como homogeneos en la formulación de las funciones productivas.

C.-Distribución y oferta de los factores productivos

Finalmente , hay cuatro relaciones de oferta que descriven la distribución de los factores entre las diferentes ocupaciones. Se tienen 20 variables de inputs incluyendo las de transporte

Las inecuaciones son:

$$7)\; V_{11}^{11} + V_{11}^{12} + V_{11}^{21} + V_{11}^{22} + V_{11}^{3} \leq \overline{V_{11}}$$

$$8)\; V_{12}^{11} + V_{12}^{12} + V_{12}^{21} + V_{12}^{22} + V_{12}^{3} \leq \overline{V_{12}}$$

$$9)\; V_{21}^{11} + V_{21}^{12} + V_{21}^{21} + V_{21}^{22} + V_{21}^{3} \leq \overline{V_{21}}$$

$$10)\; V_{22}^{11} + V_{22}^{12} + V_{22}^{21} + V_{22}^{22} + V_{22}^{3} \leq \overline{V_{22}}$$

A las condiciones examinadas mas arriba, se agregan aquellas que establecen que las variables sean mas grandes o iguales a 0 ; y que las condiciones de convexidad y de diferenciabilidad continua sean satisfechas.

La solución maximal

La maximación de la función objetivo (1) es obtenida por los metodos de programación . Alternando los valores de los precios de mercado arbitrariamente elegidos, se trazan las superficies de transformación.

La superficie de transformación es una relación entre los bienes finales librados al mercado.

Las variables correspondientes al mercado son relacionadas con las variables de autput en las localizaciones de la producción por medio de las relaciones de oferta (3) a (6) . El ajuste entre las asignaciones de factores productivos(correspondiente a toda combinación de equilibrio de las variables de mercado) toma lugar en las diferentes localizaciones de la producción y se liga a las variables de autputs. Correspondientes a las 20 variables de inputs , y a las 8 variables de mercado , se tienen 28 desigualdades diferenciales.

Cada autput producido en una localización dada , y transportado a Cada
los dos mercados diferentes , dá dos desigualdades diferenciales :

(11) $W_1^i - \lambda_1 T x_1^{ij} - \lambda m \leq 0$

(12) $W_2^i - \lambda_1 T x_2^{ij} - \lambda m \leq 0$

siendo j un lugar cualquiera

Existen en total ocho , es decir, una para cada variable de mercado.
Se identifica λ_1 al precio ficticio de una unidad de servicio de transporte y λm al precio ficticio de el bien x^{ij} en el lugar de producción (precio F.O.B.)

Para cada factor productivo proveniente de una localización dada, se obtienen 5 desigualdades diferenciales(en total 20-) :

(13) $\lambda_1 \rho^3 V_s - \lambda_K \leq 0$

14) $\lambda_2 \rho^1 V_s - \lambda K \leq 0$

(15) $\lambda_3 \rho^1 V_s - \lambda_1 T V_{sJ}^{1i} - \lambda K \leq 0; \quad i \neq J$

(16) $\lambda_4 \rho^2 V_s - \lambda K \leq 0$

(17) $\lambda_5 \rho^2 V_s - \lambda_1 T V_{sJ}^{2i} - \lambda K \leq 0 \quad ; \quad i \neq J$

Se llama λ_1 el precio ficticio de una unidad de servicio de transporte y λK la renta de el factor en el empleo local.
λ_2 a λ_5 son los precios ficticios de los bienes (FoB)
Los λ son evidentemente mas grandes o iguales a cero segun la escacez o abundancia correspondiente de recursos o de autput.
En la solución ciertas variables seran supuestas positivas y otras nulas.
Las desigualdades diferenciales que corresponden a las variables de

valor cero desaparecen y las otras satisfacen exactamente la igualdad.

El examen de las 28 desigualdades diferenciales suministra las condiciones siguientes para la distribución de los bienes finales, la asignación de los factores productivos y la elección de la localización de la producción.

1.- Si un bien producido en dos localizaciones diferentes es transportado al mismo mercado , la diferencia entre los precios ficticios de el bien en las dos localizaciones debe ser exactamente igual a la diferencia entre los costos marginales respectivos de transporte de una unidad de ese bien de las dos localizaciones al mercado.

2.-Si un bien producido en una localizacion es transportado a dos mercados , la diferencia entre los dos precios de mercado deben ser exactamente iguales a la diferencia entre los costos marginales respectivos de transporte de una unidad de ese bien del lugar de produccion a los dos mercados.

3.- Si un factor es empleado en dos industrias , localmente y en el transporte , su renta debe ser identica en los tres empleos. Esta renta debe, a su turno, ~~ig~~ ser igual a el valor de el producto marginalde el factor en cada empleo calculado en terminos de precios ficticios de los bienes respectivos(producto marginal monetario)

4.- Si un factor es exportado a otra localización para ser utilizado en una u otra industria, o en las dos, su renta debe ser igual a la renta obtenida para los factores identicos empleados localmente en la segunda localización. Esta renta debe ser igual a el valor de los productos marginales, calculados en terminos de los precios ficticios de el bien en esa localización.

Finalmente , esta misma renta pagada en la segunda localización debe ser igual a la suma de la renta del factor en la primera localización y del costo de transporte.

Estas son las condiciones neo- clásicas habituales.

Se deduce que dos factores identicos provenientes de una localización y empleados en la producción de un mismo bien en dos localizaciones diferentes, deben tener falores diferentes de sus productos marginales. La diferencia entre los valores respectivos de los valores marginales de un mismo factor empleado en la misma industria en las dos localizaciones sera igual al costo marginal de transporte de una unidad del factor de la primera localización a la segunda.

5.- Los factores provenientes de la localización que importa factores identicos no debe ser empleado en la producción de servicios de transporte.

El modelo de Lefeber no trata , contrariamente a lo que hace Isard, el transporte como un input o un producto intermediario. Así, el problema de la modificación de las funciones de producción en respuesta a las modificaciones en las relaciones espaciales no aparece.

En la optica de Lefeber, el transporte es considerado como un sacrificio social necesario, Para el analisis del equilibio general, este sacrificio no será asociado a los bienes individuales , sino sobre todo al conjunto de los bienes finales librados al mercado. Cada renta de un factor productivo deber ser gravado por su parte de esta carga social. El producto final no es identico a la suma de los factores de producción , una parte es reservada a los factores comprometidos en la producción en los servicios de transporte.

Una generalización de este sistema a un gran número de localizaciones y factores productivos es posible.

De igual forma, es posible construir formulaciones en terminos de programacion lineal, basadas sobre funciones de tipo Leontief y una relación lineal de la demanda de transportes.

CONCLUSION

Este modelo puede ayudar al planificador a considerar la distribución optima de los stock de factores productivos en el espacio , incluyendo la distribución optima de los proyectos de inversión, y el modelo optimo de red de transporte.
Estos modèlos pueden ser elegidos para todo conjunto dado de precios de mercado. Los precios son dados porque las condiciones de la demanda no son estudiadas.
Se tropieza no obstante con dos dificultades: el incremento del numero de variables y la necesidad de estimar las condiciones regionales de la demanda, si estas condiciones no son establecidas por un orden centralizado.
Se advertira el interes de este esquema para el estudio de la economia internacional, para las economias duales , las migraciones y para el desarrollo regional y urbano.

CAPITULO CUATRO

EL SISTEMA ESPACIAL DE TINBERGEN

("Sur un modele de la dispersion géographique de l'activité économique" Revue d'économie politique . enero-febrero 1964 . Scheizerische zeitschrift für Volkswirtwchaft und Statistik, 1961 ,vol.97, n° 4)

Se trata de estudiar la dispersión espacial de las actividades productivas. El autor trata de explicar la aparición de los "centros" o "aglomeraciones" industriales, segun su talla: ciudades ,aldeas .. El se interesa en una de las caracteristicas del problema: la distribución de la talla de los centros, que es mas o menos constante en la mayor parte de las regiones. Pareciera que los factores economicos ejercen aquí una acción predominante.

Este modelo contiene alguno de los elementos esenciales de una explicación, en el sentido que presenta una distribución optima de la talla de los centros ,si bien hasta ahora solo reviste un caracter hipotetico.

1 HIPOTESIS FUNDAMENTALES (y provisorias)

Sea una economía cerrada, una extensión de tierra homogenea, un cuadrado, de fertilidad constante, con una producción agrícola repartida uniformemente. Las empresas agrícolas son las únicas ligadas a un lugar. Todas las otras actividades son organizadas en "empresas industriales"

Cada empresa esta caracterizada por un índice h :

$h = 0$ para la agricultura

$h = 1$ a' H para las industrias

Cada empresa produce un bien .

Hay una talla minima para cada empresa igual a S , para la que los costos de producción son mínimos. Ellos se mantienen en el mínimo cuando la dimensión de la empresa es mas grande que S.
La unidad de cada bien es elegido de tal manera que el precio sea igual a la unidad de valor. Las cantidades representaran entonces valores.
Se supone que todos los bienes tienen ~~x~~ un flete homogeneo y que los costos de transporte son pagados por el productor.
Se supone que todos los bienes son de consumo;los ingresos de todos los habitantes se supone que son gastados de la misma manera, es decir que proporciones fijas α_h del ingreso Y son gastadas en bienes. Para todo valor de ingreso total Y , la cantidad del bien demandado $(\alpha_h \cdot Y)$ es entonces conocida.
Como la talla mínima de cada tipo de empresa es dada, se conoce entonces el número de tales empresas n_h necesarias para servir al pais.
Se puede entonces ordenar las industrias de acuerdo al orden decreciente de n_h :

(1) $n_1 > n_2 > n_3 > \ldots\ldots > n_H$

se combina toda cupla de industrias que tienen un n_h igual en una sola industria. Se supone que cada valor n_h es igual a varios multiplos de la clase siguiente n_{h+1} y las industria con un rango h " aproximadamente igual" como si ellas fueran <u>un</u> grupo de talla .
De un punto de vista formal, se puede decir tambien , en lugar de (1)

(2) $h_1 > h_2$ para todo $n_{h1} < n_{h2}$

Los enteros h seran apelados los rangos de las industrias. Se hablara de industrias de rango mas bajo o mas alto o, mas brevemente de industrias mas bajas o mas altas.

Se supondrá finalmente:

(3) $n_H = 1$

Es decir que hay solamente una industria en la industria " la mas alta" Si habría varias el pays podria ser dividido en paises mas pequeños que satisficieran la condición (3)

2.- El Problema del Optimo

Las empresas deben ahora ser localizadas.

Esta localización debe ser tal que una cierta condición de optimo sea satisfecha; se propone la condición que los costos totales de producción y de transporte del pais sean minimo , teniendo en cuenta las hipotesis fundamentales provisorias estudiadas mas arriba.

Si solo habría una industria (sin contar la agricultura) es decir si H= 1 , resulta claro que las n_1 empresas serian distribuidas uniformemente sobre la superficie del pais, dejando a cada una un area de mercado tan extendida como geometricamente sea posible . (caso de $n_1 = i^2$ y de $n_1 \neq i^2$)

Si $H > 1$ el problema se complica . Se debe admitir ahora la posibilidad de la aglomeración . El concepto de " centro " industrial aparece ahora como una combinación de empresas, de trabajadores y de familias localizados en un mismo lugar , llamado ciudad, aldea etc..

Se trata ahora de indicar cuantos centros industriales de una dada combinación de empresas , y que localizaciónes , permitiran alcanzar el optimo.

3.- Solución sugerida (la hipotesis)

La hipotesis sugerida es una solución incompleta de el problema.

Ella precisa solamente los tipos y la composición de los centros, pero no su localización.

Se supone que las localizaciones pueden ser encontradas por un proceso diferente.

La hipotesis esta formada por tres elementos:

(1) Cada centro que contiene una industria de rango h contiene tambien todas las industrias mas bajas. (con rango $<$ h)

(2) El autput total de las industrias de todo rango (salvo la mas alta es consumido por la población del centro .

Solo el producto de la industria de mas alto rango es exportado para pagar las importaciones de los productos agricolas y los productos de rango mas alto que son necesarios en el centro.

(3) El centro contiene solamente una empresa del rango mas elevado.

Se define el rango h' de un centro por el rango de la industria mas alta ubicada en ese centro.

Se pueden resumir los tres elementos como sigue: las industrias localizadas en el centro son $1 \leqslant h \leqslant h'$, y ellas no exportan, mientras que el numero $n_{h,}^{h'}$ de las empresas h en el centro h' satisfacen la condición $n_{h'}^{h'} = 1$

Se llamará $N_{h'}$ el número de centros h'

$Y_{h'}$ el ingreso total de los $N_{h'}$ centros h'

la demanda se escribe (para un bien h) : α_h^y

$$Y = \sum_{0=h'}^{H} Y_{h'}$$

(4) Por hipotesis : $\sum_{0=h}^{H} \alpha_h = 1$

Por definición el número de empresas de cada tipo h :

$$n_h = \frac{\alpha_h Y}{s_h}$$

El índice h ha sido distribuido de tal manera que, para las industrias se tiene:

$$n_h > n_{h+1} \qquad \text{para} \quad 1 \leq h \leq H$$

Ademas : $n_H = 1$

Y, si $N_{h'}$, es el número de centros h', se tiene: $N_H = 1$

Se puede calcular , Y , α_h y n_h siendo dados los valores:

N_h : la distribución de los centros por tamaño

Y_h : la distribución del ingreso(o de la producción entre los centros.

Para ello calculamos primero los ingresos $Y_{h'}$ de cada familia de centros con rango h'

1) para h' = 0 (las areas rurales): la demanda total de bienes agricolas siendo $\alpha_0 Y$, se tiene $Y_0 = \alpha_0 Y$

2) para h' = 1 (son las pequeñas aldeas que no poseen nada mas que una pequeña empresa industrial) : estos centros producen el bien 1 , exportando una parte a las areas rurales e importando todo el resto.

Las importaciones totales se escriben:

$$(\alpha_0 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_H) Y_1$$

y ellas son iguales a el valor de las exportaciones $(\alpha_1 Y_0)$

$$\alpha_1 Y_0 = Y_1 \left(\sum_{2=h}^{H} \alpha_h + \alpha_0 \right)$$

puesto que (cf. 4) $\sum_{0=h}^{H} \alpha_h = 1$, se obtiene :

$$\alpha_1 Y_0 = (1-\alpha_1)\, Y_1$$, de lo que se deduce ;

$$Y_1 = \frac{\alpha_1 Y_0}{(1-\alpha_1)} = \frac{\alpha_0 \alpha_1 Y}{(1-\alpha_1)}$$ y tambien $Y_0 + Y_1 = \dfrac{\alpha_0 Y}{1-\alpha_1}$

$$\text{pues} \left[\begin{array}{l} Y \left(\alpha_0 + \dfrac{\alpha_0 \alpha_1}{1-\alpha_1} \right) \\[2ex] Y \left(\dfrac{\alpha_0 (1-\alpha_1) + \alpha_0 \alpha_1}{1-\alpha_1} \right) \\[2ex] Y \left(\dfrac{\alpha_0 - \alpha_0 \alpha_1 + \alpha_0 \alpha_1}{1-\alpha_1} \right) \end{array} \right.$$

3) Para $h' = 2$. Los centros exportan el producto 2 a los centros 0 y 1, en cantidad y valores iguales a :

$$\alpha_2 (Y_0 + Y_1)$$

Ellos compensan sus importaciones, que son $3 \leq h \leq H$ y cuyo valor es : $Y_2(\alpha_0 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_H)$, es decir que

$\alpha_2 (Y_0 + Y_1) = (1 - \alpha_1 - \ldots\ldots - \alpha_2)\, Y_2$, pues $\sum \alpha = 1$

Donde

$$Y_2 = \frac{\alpha_0 \, \alpha_2 \, Y}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_1-\alpha_2)}$$

pues

$$\left[\begin{array}{l} Y_2 = \dfrac{\alpha_2 \, (Y_0 + Y_1)}{(1-\alpha_1-\alpha_2)} \\[2ex] Y_2 = \dfrac{\alpha_2 \left(\frac{\alpha_0}{1-1}\right) Y}{(1-\alpha_1-\alpha_2)} \end{array}\right.$$

$$y \quad Y_0 + Y_1 + Y_2 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\alpha_2} Y$$

pues

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{(\alpha_0)(1-\alpha_1-\alpha_2)+\alpha_0\alpha_2}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_1-\alpha_2)} Y \\[2ex] \dfrac{\alpha_0 - \alpha_0\alpha_1 - \alpha_0\alpha_2 + \alpha_0\alpha_2}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_1-\alpha_2)} Y \\[2ex] \dfrac{\alpha_0 \, (1-\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_1-\alpha_2)} Y \end{array}\right.$$

y generalizando :

$$Y_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots + Y_{h'} = \sum_{h''=0}^{h'} Y_{h''} \frac{\alpha_0 Y}{1-\alpha_1-\ldots-\alpha_{h'}}$$

De dónde se derivan todas las Y_h.

Se tiene así:

$$Y_4 = \frac{\alpha_0 Y}{1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4} - \frac{\alpha_0 Y}{1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}\, i$$

reduciendo, se obtiene:

$$Y_4 = \frac{\alpha_0 \alpha_4 Y}{(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)}\, i$$

$$Y_h = \frac{\alpha_0 \alpha_h Y}{(1-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_{h-1})(1-\alpha_1-\cdots-\alpha_h)}$$

Se verifica así que:

$$Y_0 + Y_1 + \ldots\ldots + Y_H = \sum_{h'=0}^{H} Y_{h'} = Y$$

4.) Ejemplo

Sea

$H = 5$

$\alpha_0 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0{,}2$

$\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}1$

$Y = 1000$ $\qquad$ $n_3 = 39$

$n_1 = 900$ $\qquad$ $n_4 = 10$

$n_2 = 200$ $\qquad$ $n_5 = 1$

1) Cálculo de las Y_h

$$Y_0 = \alpha_0 Y = 200$$

$$Y_1 = \frac{0,2 \times 0,1 \times 1000}{1 - 0,1} = 22$$

$$Y_2 = \frac{0,2 \times 0,1 \times 1000}{(1-0,1)(1-0,1-0,1)} = 28$$

$$Y_3 = \frac{0,2 \times 0,2 \times 1000}{(1-0,1-0,1)(1-0,1-0,1-0,2)} = 83$$

$$Y_4 = \frac{0,2 \times 0,2 \times 1000}{(1-0,1-0,1-0,2)(1-0,1-0,1-0,2-0,2)} = 167$$

$$Y_5 = \frac{0,2 \times 0,2 \times 1000}{(1-0,1-0,1-0,2-0,2)(1-0,1-0,1-0,2-0,2-0,2)} = 500$$

De lo que se deduce:

a) $\alpha_h Y$ = proporción del ingreso total consagrado al bien h.

$\alpha_0 Y = 0,2 \times 1000 = 200$

$\alpha_1 Y = 0,1 \times 1000 = 100$

$\alpha_2 Y = 0,1 \times 1000 = 100$

$\alpha_3 Y = 0,2 \times 1000 = 200$

$\alpha_4 Y = 0,2 \times 1000 = 200$

$\alpha_5 Y = 0,2 \times 1000 = 200$

b) El tamaño mínimo de una empresa produciendo el bien h ,donde el número total es n_h por :

$$s_h = \frac{\alpha_h Y}{n_h}$$

$$s_0 = \frac{200}{1} = 200$$

$$s_1 = \frac{100}{900} = 0{,}11$$

$$s_2 = \frac{100}{200} = 0{,}5$$

$$s_3 = \frac{200}{39} = 5{,}13$$

$$s_4 = \frac{200}{10} = 20$$

$$s_5 = \frac{200}{1} = 200$$

2) Calculo de las $n_{h'}^{h'}$ número de empresas del centro de rango h' produciendo el bien h .

a) Teniendo la igualdad :

$$h_h^h + n_h^{h+1} + \cdots + n_h^H = n_h$$

se deduce :

$$s_h \quad n_h^h + \alpha_h (Y_{h+1} + \cdots + Y_H) = h^Y$$

donde las n_h^h están dadas por :

$$n_h^h = \frac{\alpha_h}{s_h} (Y - Y_{h+1} - \cdots\cdots - Y_H)$$

<u>Aplicación</u>

$$n_5^5 = \frac{\alpha_5}{s_5} Y = \frac{0{,}5 \times 1000}{200} = 1$$

$$n_4^4 = \frac{\alpha_4}{s_4}(Y-Y_5) = \frac{0,2\ (1000 - 500)}{200} = 5$$

$$n_3^3 = \frac{\alpha_3}{s_3}(Y - Y_5 - Y_4) = \frac{0,2\ (1000 - 500 - 167)}{5,13} = 13$$

$$n_2^2 = \frac{\alpha_2}{s_2}\left(Y - \sum_{k=3}^{5} Y_k\right) = \frac{0,1\ (1000-500-167-83)}{0,5} = 50$$

$$n_1^1 = \frac{\alpha_1}{s_1}\left(Y - \sum_{k=2}^{5} Y_k\right) = \frac{0,1\ (1000-500-167-83-28)}{0,11} = 200$$

b) Como, por convención, $n_h^h = 1$, el número de centros de rango h' produciendo el bien h' es :

$$N_{h'} = n_{h'}^{h'} \quad ,\text{de dónde}$$

$N_5 = n_5^5 = 1$

$N_4 = n_4^4 = 5$

$N_3 = n_3^3 = 13$

$N_2 = n_2^2 = 50$

$N_1 = n_1^1 = 200$

3) Calculo de los $n_h^{h'}$ para h' h

$$n_4^5 = n_5 - n_5^5 = 10 - 5 = 5$$

$$n_3^4 + n_3^5 = n_3 - n_3^3 = 39 - 13 = 26$$

$$n_2^3 + n_2^4 + n_2^5 = n_2 - n_2^2 = 200 - 50 = 150$$

$$n_1^2 \quad n_1^3 \quad n_1^4 \quad n_1^5 = n_1 - n_1^1 = 900 - 200 = 700$$

los $n_h^{h'}$ seran determinados por:

$$\frac{\alpha_h Y_{h+1}}{n_h^{h+1}} = \frac{\alpha_h Y_{h+2}}{n_h^{h+2}} = \ldots \frac{\alpha_h Y_H}{n_h^H} = \frac{\alpha_h \sum_{k=h+1}^{H} Y_k}{\sum_{k=h+1}^{H} n_h^k}$$

Sea:

$$\frac{Y_{h+1}}{n_h^{h+1}} = \frac{Y_{h+2}}{n_h^{h+2}} = \ldots \frac{Y_H}{n_h^H} = \frac{\sum_{k=h+1}^{H} Y_k}{n_h - n_h^h}$$

Aplicación:

a) h= 3

$$\frac{h_4}{n_3^4} = \frac{Y_5}{n_3^5} = \frac{Y_4 + Y_5}{n_3^4 + n_3^5} = \frac{167 + 500}{26} = 25{,}6$$

De donde:

$$n_3^4 = \frac{Y_4}{25{,}6} = \frac{167}{25{,}6} = 6{,}5$$

$$n_3^5 = \frac{Y_4}{25{,}6} = \frac{500}{25{,}6} = 19{,}5$$

b) h= 2

$$\frac{Y_3}{n_2^3} = \frac{Y_4}{n_2^4} = \frac{Y_5}{n_2^5} = \frac{83+167+500}{150} = 5$$

De donde

$$n_2^3 = \frac{83}{5} = 17$$

$$n_2^4 = \frac{167}{5} = 33$$

$$n_2^5 = \frac{500}{5} = 100$$

c) h= 1

$$\frac{Y_2}{n_1^2} = \frac{Y_3}{n_1^3} = \frac{Y_4}{n_1^4} = \frac{Y_5}{n_1^5} = \frac{28+83+167+500}{700} = 1,11$$

De donde :

$$n_1^2 = \frac{Y_2}{1,11} = \frac{28}{1,11} = 25$$

$$n_1^3 = \frac{Y_3}{1,11} = \frac{83}{1,11} = 75$$

$$n_1^4 = \frac{Y_4}{1,11} = \frac{167}{1,11} = 100$$

$$n_1^5 = \frac{Y_5}{1,11} = \frac{500}{1,11} = 450$$

Número total de empresas en cada grupo de tamano(talla) de los centros y por tipo de bien producido.

Rango de los centros. / Bienes	1	2	3	4	5	No.de centros
1	200	-	-	-	-	200
2	25	50	-	-	-	50
3	75	17	13	-	-	13
4	150	33	6,5	5	-	5
5	450	100	19,5	5	1	1
Total	900	200	39	10	1	

El autor señala las consecuencias de estas hipotesis

1) El número de empresas, obtenido con Y_h, y α_h con la ayuda de s_h , y N_h, , el numero de los centros pueden no ser números enteros.
2) Existe incompatibilidades entre las hipotesis; ejemplo: el principio de un optimo de costo total minimo y la hipotesis que las empresas son de igual tamaño cualquiera que sea el centro donde se hallen localizadas.
3) Puede ser necesario suponer que cada empresa exporte alguna cosa
4) El problema de los precios no ha sido encarado.